(1/4/2008)

TEMA 6: INTEGRACIÓN NUMÉRICA.

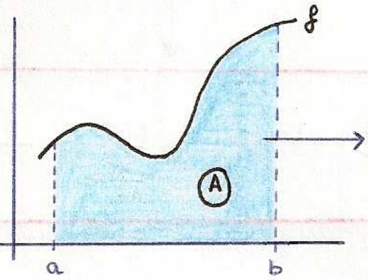
1. INTRODUCCIÓN.

La Integración Numérica la vamos a aplicar de manera directa como un problema de Interpolación.

* **ENUNCIADO.-** Uno de los problemas más antiguos es el de calcular el área que encierra una curva. Por ejemplo, calcular la superficie de una parcela.

* **SOLUCIÓN.-** La solución son las FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA (f.i.n) o de Curvatura. Tienen como objetivo aproximar el valor de la integral de una función en un intervalo.

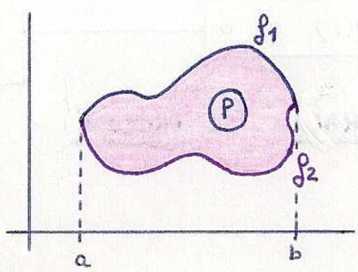
* **GRÁFICAMENTE.-** Dados f, $[a, b]$



$$\text{Área} = A = \int_a^b f \simeq fin[f, a, b]$$

La fin. dependerá de f, $[a,b]$

* **APLICACIÓN.-** En el caso de la parcela:



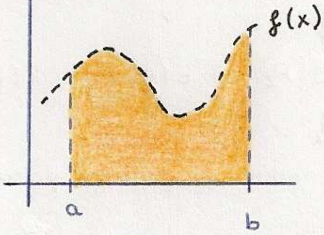
$$\text{Área}(P) = \int_a^b (f_1 - f_2) \simeq f.i.n.[f_1, f_2, a, b] =$$

$$= fin[f_1, a, b] - fin[f_2, a, b]$$

ii) PROBLEMA INTEGRACIÓN:

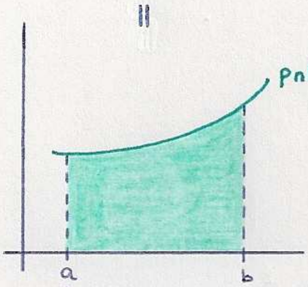
ENTRADA

f, $\{x_i\}$, $[a,b]$



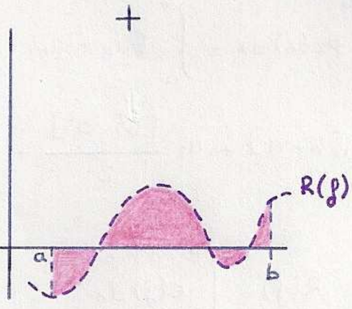
$\int_a^b f$

$\|$



f.i.n. Intervalo de interpolación

$+$



error

PROCESO

a) **Tipo interpolatorio:** Integramos $\boxed{0}$

$$\boxed{\int_a^b f = \underbrace{\int_a^b p_n}_{\sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) = f.i.n.} + \underbrace{\int_a^b e(f)}_{[\text{error\_integración}] = R(f)}} \quad \boxed{1}$$

$\sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) = f.i.n.$ (Algoritmo)

b) **Fórmulas de Gauss.**

SALIDA

$$\int_a^b f \simeq \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) \in \mathbb{R} = f.i.n.$$

EXPRESIÓN DEL ERROR $= R(f)$

- Magnitud del error:
  $|R(f)| < \text{Cota}$
  $\left|\int_a^b f - \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i)\right| < \text{Cota}$
- Bondad fórmula (exactitud)

$\boxed{1}$

* ORDEN DE UNA f.i.n.-

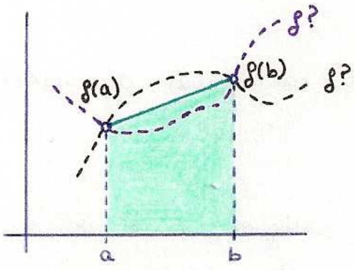
- La f.i.n. es exacta para f si $R(f) = 0$.

- La f.i.n. es de orden n si es exacta para $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$

f.i.n_trapecio => orden 1 f.i.n_3_nodos => orden 2

*** EJEMPLO:**

Dados $[a, b]$, $f(a)$, $f(b)$. Construir f.i.n. "más sencilla".



→ No sabemos por dónde va f, pero la más fácil es la recta que une las dos imágenes.

¿Cuál es el valor aproximado de $\int_a^b f$ si f es desconocida?

- El "mejor" valor aproximado de dicha integral con los datos que tenemos disponibles es:

$\int_a^b f \simeq$ Área del trapecio inscrito en los 4 puntos:

↓

$$\boxed{\text{f.i.n.\_trapecio} = (b-a) \cdot \frac{f(a)+f(b)}{2}}$$

*** RECOPILANDO.-**

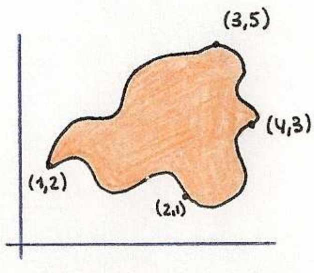
TENEMOS: fin_trapecio.

ALGORITMO: $\boxed{f(a) \;\; f(b) \;\; a \;\; b} \longrightarrow \boxed{\text{fin-trapecio} = (b-a) \cdot \frac{f(a)+f(b)}{2}}$

ENTRADA **PROCESO** **SALIDA**

*** EJEMPLO:**

Calcular la superficie aproximada de la parcela:



* RANGO DE APLICACIÓN DE LAS f.i.n (UTILIDADES).-

* Cuando de la f no se conoce su expresión analítica, sino sólo algunos de sus valores discretos.

* Cuando de la f se conoce su expresión analítica, pero es muy complicada o muy dificil de integrar.

En general:

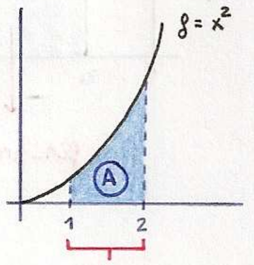
* $\int f$ no se puede programar.

* f.i.n. sí se puede programar [Algoritmo]

Académicamente, utilizaremos funciones "f" con expresiones analíticas sencillas cuyas integrales son inmediatas de calcular y no tienen sentido las f.i.n.

* REPRESENTACIÓN GRÁFICA.-

APLICACIÓN: f.i.n._trapecio → Significado gráfico.
DATOS: $f(x) = x^2$, $[a, b] = [1, 2]$
OBJETIVO: Aproximar el área que viene dada por la expresión $\int_a^b f$



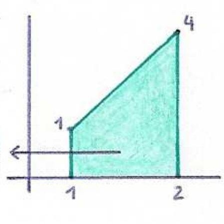
$$\text{Área} = A = \int_1^2 x^2 dx = \text{Valor exacto}$$

[Área] = [Valor exacto]

ESTRATEGIA: f.i.n._trapecio

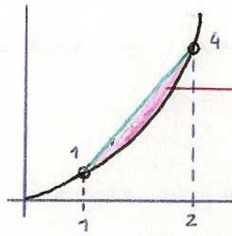
$$\text{f.i.n.\_trapecio}\left\{ f(x) = x^2 \quad a=1 \quad b=2 \right\} = (b-a) \cdot \frac{f(a)+f(b)}{2} = (2-1) \cdot \frac{1+4}{2} =$$

$$= \frac{5}{2} = 2'5 = [\text{Valor aproximado}]$$



[Área trapecio inscrito] = [Valor aprox.]

ERROR: [Error_ aproximado] = [Valor_ exacto] - [Valor_ aproximado]



* NOMENCLATURA.-

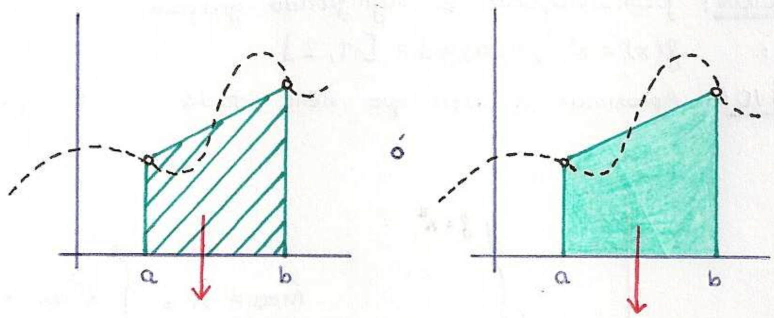
REPRESENTACIÓN GRÁFICA : fin_ trapecio.

ELEMENTOS DE LA GRÁFICA :

[a, b] Intervalo de integración

o Valores de la f que utiliza la fórmula.

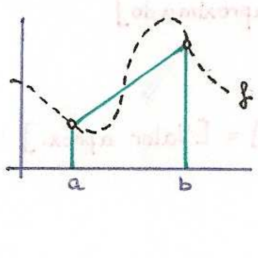

Área que realmente calcula la fórmula.



---- Función f.

* EJERCICIO:

Calcular gráficamente el error → ¿[Error_ aprox.] ≷ 0 ?



(2/4/2008)

Podemos escribir:

$$\int_a^b f \simeq f.i.n.\left[f, [a,b]\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\int_a^b f}_{[\text{Valor\_exacto}]} = \underbrace{f.i.n.\left[f, [a,b]\right]}_{[\text{Valor\_aprox}]} + \underbrace{\text{ERROR}}_{[\text{Error\_aprox}]}$$

[Valor_exacto] => Nº desconocido

[Valor_aproximado] => Nº conocido (algoritmo)

[Error_aproximado] => Nº que no se conoce explícitamente.
Viene dado por una expresión: $(f, [a,b], f' \ldots f^{n)})$
Se puede acotar.
→ Magnitud del error.

Dada f.i.n. Sea f, $[a,b]$. Entonces:

[Error_aprox] = 0 => f.i.n. exacta para f.

$\Downarrow$

[Valor_exacto] = [Valor_aprox]

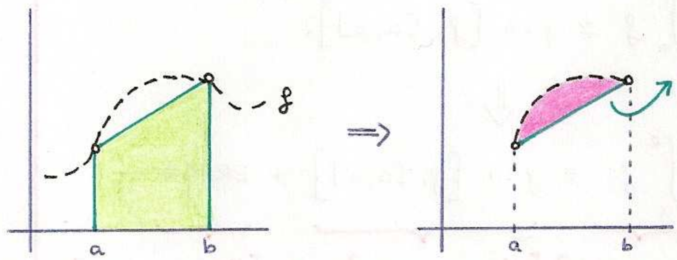
[Error_aprox] ≠ 0 => f.i.n. no exacta para f.

Dada una f.i.n ¿Para qué conjunto de funciones es exacta?

* **BONDAD DE UNA FÓRMULA.**- Familia de funciones para las que la fórmula es exacta.

* EJEMPLO :

¿Para qué funciones f es exacta la fórmula $f$in_trapecio?



f.i.n_trapecio (2 nodos) es exacta para $\mathcal{P}_1$: polinomios de grado ≤ 1

* CAMPO DE ESTUDIO.-

Problema de Integración Numérica

→ SOLUCIÓN EXACTA = [Valor_exacto]
- * Sólo se conoce en algunos casos.
- * Costoso computacionalmente.
- * No se puede programar.

→ SOLUCIÓN NUMÉRICA = [Valor_aproximado]

→ VALOR EFECTIVO (Algoritmo)

Prob. Integración Numérica ⟹ Algoritmo

→ VALOR APROXIMADO ("A mano")

↓

Calcular
- Magnitud del error ⟹ Cota : nº $\mathbb{R} \geq 0$
- Bondad de la fórmula

* EJEMPLO :

Sea una red de carreteras en cuyo trazado se han utilizado splines naturales. Calcular la f.i.n. exacta para los splines naturales.

ESTRATEGIA NUMÉRICA → Aplicación del problema de interpolación.

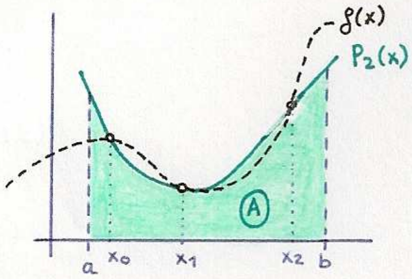
$$\boxed{\text{Problema de Interpolación}} \xrightarrow{\text{Aplicación}} \boxed{\text{Problema de Integración}}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$f(x) = P_n(x) + e(f)$$

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{[\text{Valor\_exacto}]} = \underbrace{\int_a^b P_n(x)\,dx}_{[\text{Valor\_aprox}]} + \underbrace{\int_a^b e(f)\,dx}_{[\text{Error\_aprox}]}$$

EJERCICIO GRÁFICO → Interpolación Polinomial Clásica : f, $\{x_0, x_1, x_2\}$



Solución ⇒ Polinomio de grado 2 que pasa por los tres puntos:

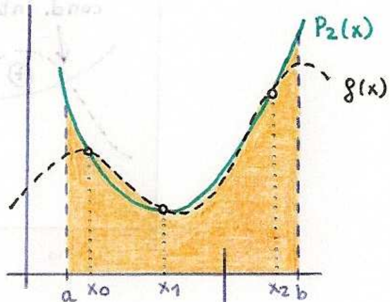
$$P_2(x_i) = f(x_i)$$

PROBLEMA INTEGRACIÓN → Dados f, $[a,b]$

$$\text{(A)} = \text{Área} = \text{fin\_3\_nodos}\left[f, [a,b]\right] = \int_a^b P_2(x)\,dx$$

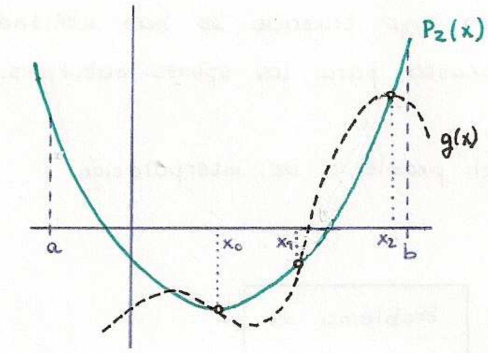
$[a,b]$ = Intervalo de interpolación.

$\{x_0, x_1, x_2\}$ = Nodos de interpolación.



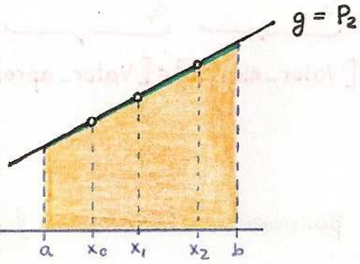
$$[\text{Valor\_exacto}] = \int_a^b f(x)$$

Debemos saber aplicarlo en otro caso:



Calcular las funciones f para las que fin_3_nodos es exacta (Bondad)

¿Es exacta fin_3_nodos para $g \equiv$ recta?



[Error_aproximado] = 0

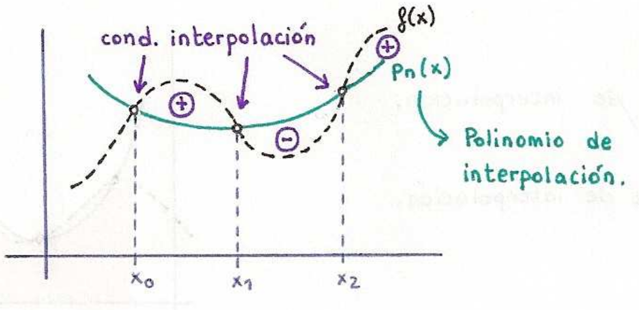
Sí, fin_3_nodos es exacta para rectas (P_1)

(3/4/2008)

1.1. ESQUEMA GENERAL.

i) PROBLEMA INTERPOLACIÓN:

ENTRADA	PROCESO	SALIDA
$f, \{x_i\}$ →	Fórmula Interpolación →	$p_n \in \mathcal{P}_n$ Polinomios grado $\leq n$ $f \simeq p_n$ $\quad f(x_i) = p_n(x_i)$ $\boxed{f = p_n + e(f)}$ $\boxed{0}$



[error_interpolación]

* EJEMPLO :

fin_3_nodos $[f, \{x_0, x_1, x_2\}, [a,b]]$

Tenemos :

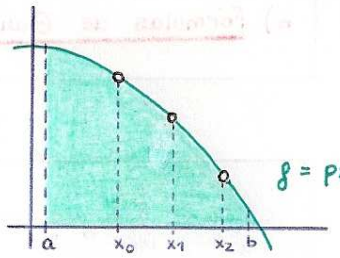
* Gráfica
* Bondad de la fórmula $\Rightarrow$ ¿Para qué f se cumple $R(f) = 0$?

$\downarrow$

Si $f \in \mathcal{P}_2 \Rightarrow e(f) = 0$, $R(f) = 0$

$\downarrow$

fin_3_nodos es exacta para $\mathcal{P}_2$.



Nos falta:

* Calcular $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

$$\text{fin\_3\_nodos} = \int_a^b p_2(x)\,dx = \int_a^b (a_0 + a_1x + a_2x^2)\,dx =$$

$$= a_0[b-a] + a_1\frac{[b^2-a^2]}{2} + a_2\frac{[b^3-a^3]}{3}$$

* Calcular $e(f) \longrightarrow$ Calcular $R(f) = \int_a^b e(f)\,dx$

$\searrow$ Cota $\Rightarrow |R(f)| < $ Cota

1.2. TIPOS DE ESTRATEGIAS PARA MEJORAR LAS f.i.n.

Depende de la expresión del error:

$$R(f) \begin{cases} \text{MAGNITUD DEL ERROR.} \\ \\ \text{BONDAD DE LA FÓRMULA.} \end{cases}$$

a) MEJORA DE LA BONDAD DE LA FÓRMULA:

OBJETIVO: Obtener / construir f.i.n. del mayor orden posible.

Hay 2 estrategias:

a.1) Fijados a priori los nodos $\{x_i\}_0^n \subset [a,b]$:

Reenunciamos el problema como problema de mejor aproximación.

CALCULAR COEFICIENTES: $\{c_i\}_0^n$ tal que:

FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN DE TIPO INTERPOLATORIO.

$\boxed{2}$ $\boxed{\int_a^b f \simeq \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i)}$ sea de máximo orden.

Es decir, elegimos $f \in \{1, x, x^2 \dots\}$ e imponemos exactitud para x^k, $k = 0, 1, 2 \dots$

Reescribimos $\boxed{2}$ como: $\boxed{\int_a^b x^k = \sum_{i=0}^{n} c_i x_i^k}$ $\forall k = 0, 1, 2 \dots$

Elijo el k que yo quiera

Impongo igualdad

Entonces: Tenemos $n+1$ incógnitas $\left(\{c_i\}_0^n\right) \Rightarrow$ Imponemos $n+1$ condiciones $(k = 0, 1, \dots, n)$

ENTRADA: $\{x_i\}, [a,b]$ → PROCESO: Calcular c_i que verifique: $\int_a^b x^k = \sum_{i=0}^{n} c_i x_i^k \quad \forall k = 0, 1, \dots, n$. Trata de resolver el sistema lineal → SALIDA: $fin[f, [a,b]] = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i)$; fin de orden n.

a.2) Calcular nodos $\{x_i\}_0^n$ y los coeficientes $\{c_i\}_0^n$:

Calcular nodos y coeficientes tal que:

$\boxed{2}$ $\boxed{\int_a^b f \simeq \sum_{i=0}^{n} \underbrace{c_i}_{} f(\underbrace{x_i}_{})}$ sea de orden máximo.

incógnitas

Imponer exactitud: $f \subset \{1, x, x^2, \dots\} \Rightarrow \boxed{\int_a^b x^k = \sum_{i=0}^{n} c_i x_i^k}$ $\forall k = 0, 1, 2 \dots$

Entonces: Tenemos $2(n+1) = 2n+2$ incógnitas $\left(\{x_i, c_i\}_0^n\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Imponemos $2n+2$ condiciones $(\forall k = 0, 1, \dots, 2n+2)$

FÓRMULA DE GAUSS

ENTRADA

$[a,b]$ →

PROCESO

Calcular $\{c_i, x_i\}_0^n$

$\int_a^b x^k = \sum_{i=0}^{n} c_i x_i^k \quad \forall k = 0, \dots 2n+1$

Sistema no lineal.

→

SALIDA

$fin[f, [a,b]] = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i)$

fin de orden $2n+1$

b) MEJORA DE LA MAGNITUD DEL ERROR:

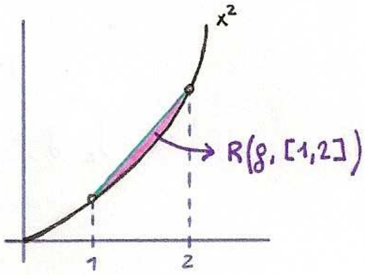
Dada una f.i.n., minimizar $|R(f)|$ para que $\int_a^b f \simeq \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i)$

Lo más igual posible.

* EJEMPLO:

fin_trapecio , $f = x^2$, $[1,2]$

$$\int_1^2 x^2\,dx = \text{fin\_trapecio}\left(x^2, [1,2]\right) + R(f, [1,2])$$

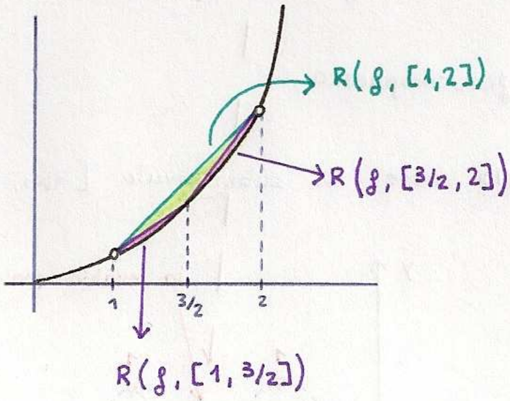


$$\int_1^2 x^2\,dx = \int_1^{3/2} x^2 + \int_{3/2}^2 x^2 =$$

$$= \underbrace{\boxed{\begin{matrix}\text{fin\_trapecio}(f, [1, 3/2]) \\ \text{fin\_trapecio}(f, [3/2, 2])\end{matrix}}}_{\text{fin\_trapecio\_compuesta}(f, [1,2])} \begin{matrix} + \\ + \end{matrix} \underbrace{\boxed{\begin{matrix}R(f, [1, 3/2]) \\ R(f, [3/2, 2])\end{matrix}}}_{R\_\text{compuesta}(f, [1,2])} +$$

De estas dos f.i.n., ¿cuál es más precisa?

fin_trapecio_compuesta es más precisa que fin_trapecio



$$\left|R(f, [1,2])\right| >> \left|R(f, [1, 3/2])\right| + \left|R(f, [3/2, 2])\right|$$

Reiterando el proceso, subdividimos $[a,b]$ en N subintervalos:

$$\text{Error\_fin\_compuesta} = \sum_{i=0}^{N} \left|R(f, \text{subintervalo})\right| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

Por tanto, podemos conseguir una fin tan precisa como queramos. Así podemos resolver problemas del tipo:

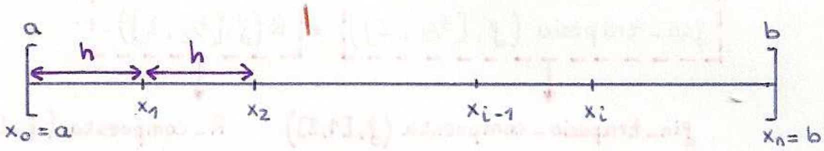
Dada f, $[a,b]$, fin. Sea $\varepsilon > 0$, calcular N para que $|R(f)| < \varepsilon$.

* EJERCICIO: EXAMEN

Calcular $\int_1^2 (\log t)^2\, dt$ con un error $< 10^{-3}$ utilizando:

$$\int_a^b f = \underbrace{\sum_{i=1} \frac{h}{6}\left[f(x_{i-1}) + 4 \cdot f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + f(x_i)\right]}_{fin} \underbrace{- (b-a) \cdot \frac{h^4}{2880} \cdot f^{(iv)}(\xi)}_{error}$$

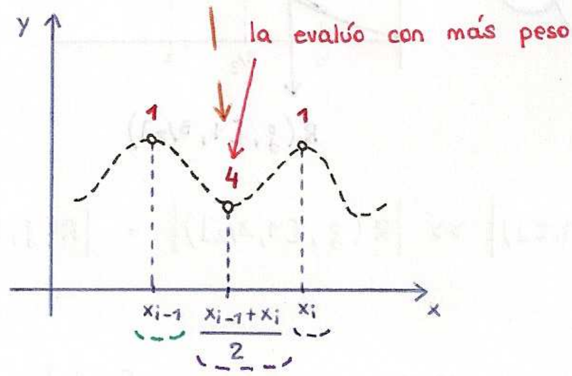
$x_0 = a$ $\quad x_i = x_0 + ih$, $i = 1, \dots n$ $\quad h = \frac{b-a}{n}$. $\xi \in [a,b]$



¿La fórmula de integración es simple o compuesta?

Es fin_compuesta.

¿Qué aspecto tiene un subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$?



* Orden de la fin → Bondad / Exactitud.

Para esto siempre tenemos que referirnos a $R(f)$.

¿fin es exacta para $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$?

$\Downarrow$

¿$R(f) = 0$ para $f \in \{1, x, x^2, x^3, \dots\}$?

$f = cte$; $R(f) = 0$

$f = x$; $R(f) = 0$

$f = x^2$; $R(f) = 0$

$f = x^3$; $R(f) = 0$

$f = x^4$; $R(f) \neq 0$ $\Rightarrow$ Por lo tanto, fin es de orden 3.

* Magnitud del error.

Depende de $R(f)$, que a su vez depende de lo siguiente:

$$R(f) \text{ depende de } \begin{cases} f = \text{función que estamos integrando.} \\ [a,b] = \text{intervalo de integración} \\ N = n^{\underline{o}} \text{ de subintervalos} \end{cases}$$

Nos piden [error_integración] $< 10^{-3}$

* ESTRATEGIA.-

i) Buscar N tal que el error $< 10^{-3}$.

$$|R(f)| < 10^{-3}, \quad f(x) = \log^2 x, \quad [a,b] = [1,2]$$

ii) Calcular [valor_aproximado] = fin $\Big[\underbrace{[1,2]}_{[a,b]}, \underbrace{\log^2 x}_{f}, \underbrace{N}_{N}\Big]$

$$\int_1^2 \log^2 x\, dx \simeq [\text{valor\_aproximado}]$$

error $< 10^{-3}$

Vamos a hacerlo.

(8/4/2008)

i) Calcular N tal que $|R(f)| < 10^{-3}$

$$[a,b] = [1,2] \qquad h = \frac{b-a}{N} = \frac{1}{N}$$

$$f(x) = \log^2 x \;;\; f'(x) = \frac{2\log x}{x} \;;\; f''(x) = \frac{2(1-\log x)}{x^2} \;;$$

$$f'''(x) = \frac{-4(1-\log x)}{x^3} - \frac{2}{x^3} \;;\; f^{IV} = \frac{16-12\log x}{x^4} + \frac{6}{x^4}$$

$$|R(f)| = \left| \underset{1}{\underset{\shortparallel}{(b-a)}} \cdot \frac{h^4}{2880} \cdot f^{IV}(\xi) \right| = \frac{1}{2880} \cdot \frac{1}{N^4} \cdot \left| f^{IV}(\xi) \right| \quad , \; \xi \in [1,2]$$

$$\boxed{\left| f^{IV}(2) - f^{IV}(1) \right|} \approx 22$$

Por tanto, tenemos:

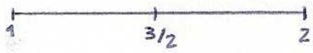
$$|R(f)| < 10^{-3} \quad ; \quad \frac{1}{2880} \cdot \frac{1}{N^4} \cdot 22 < 10^{-3} \leftarrow \text{Despejar } N$$

$$\frac{22}{2880} \cdot \frac{1}{10^{-3}} < N^4 \;;\quad 7'639 < N^4 \;;\quad 1'66 < N$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{N = 2}$$

ii) Calcular $\int$: $N = 2$ subintervalos $\Rightarrow h = \frac{1}{2}$; $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 2$



$$\int_1^2 f \simeq \frac{1}{12} \left[\underbrace{\left[f(1) + 4f\left(\tfrac{5}{4}\right) + f\left(\tfrac{3}{2}\right) \right]}_{i=1} + \underbrace{\left[f\left(\tfrac{3}{2}\right) + 4f\left(\tfrac{7}{4}\right) + f(2) \right]}_{i=2} \right] ;$$

$$\int_1^2 \log^2 x\,dx = \frac{1}{12} \left[0 + 4\log^2\left(\tfrac{5}{4}\right) + \log^2\left(\tfrac{3}{2}\right) + \log^2\left(\tfrac{3}{2}\right) + 4\log^2\left(\tfrac{7}{4}\right) + \log^2(2) \right] \simeq 0'1884 \;;$$

$$\boxed{0'1884 - 10^{-3} \leq \int_1^2 \log^2 x \leq 0'1884 + 10^{-3}}$$

* COMPARAR PRESTACIONES.-

Comparar las prestaciones numéricas de las fórmulas para $N=1$ y $N=2$.

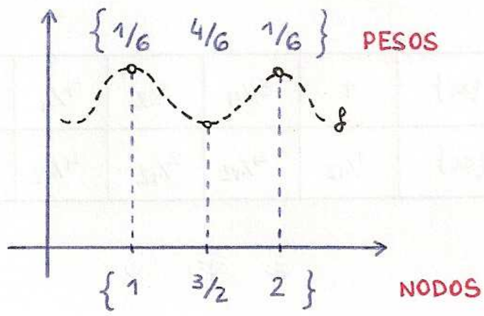
¿La fin compuesta ($N=2$) es
- +/- costosa computacionalmente
- nº eval. fin ($N=2$) / nº eval. fin ($N=1$)
- +/- precisión numérica
- +/- exacta

que la fin simple ($N=1$) ?

Comparar las prestaciones numéricas de la fórmula $N=1$ (simple) y la fórmula $N=2$ (compuesta) en $[a,b]=[1,2]$

a) $N=1$, $h=\frac{1}{1}=1$, $x_0=1$, $x_1=2$

$$\int_1^2 f = \frac{1}{6}\underbrace{\left[f(1)+4f\left(\tfrac{3}{2}\right)+f(2)\right]}_{i=1} - \frac{1}{2880}\cdot f^{IV)}(\xi) \quad , \quad \xi\in[1,2]$$



$$\int_1^2 f \simeq \sum_{i=1}^{n} \underset{\text{pesos}}{c_i}\, \underset{\text{nodos}}{f(x_i)}$$

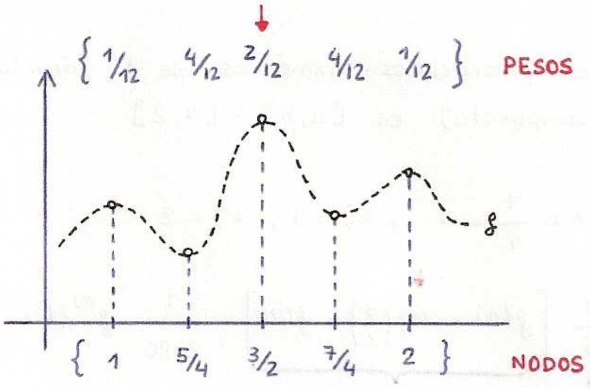
Como todas se reducen a esto, podemos representarlo como una tabla de doble entrada.

NODOS $\{x_i\}$	1	3/2	2
PESOS $\{c_i\}$	1/6	4/6	1/6

b) $N = 2$, $h = \dfrac{1}{2}$, $x_0 = 1$, $x_1 = \dfrac{3}{2}$, $x_2 = 2$

$$\int_1^2 f = \frac{1}{12}\left[\underbrace{\left[f(1) + 4f\left(\tfrac{5}{4}\right) + f\left(\tfrac{3}{2}\right)\right]}_{i=1} + \underbrace{\left[f\left(\tfrac{3}{2}\right) + 4f\left(\tfrac{7}{4}\right) + f(2)\right]}_{i=2}\right] -$$

$$- \underbrace{\frac{1}{2^4}}_{N^4} \cdot \frac{1}{2880} \cdot f^{(iv)}(\xi) \,, \quad \xi \in [1,2]$$



NODOS $\{x_i\}$	1	5/4	3/2	7/4	2
PESOS $\{c_i\}$	1/12	4/12	2/12	4/12	1/12

Comparar prestaciones numéricas:

* Coste computacional.
* Precisión numérica.
* Exactitud.

¿La fin_compuesta ($N=2$) es { +/-/= costosa computacionalmente ; +/-/= precisa numéricamente ; +/-/= exacta } que la fin_simple $N=1$?

i) Costosa computacionalmente: Se mira en el valor aproximado:

$N=2 \Rightarrow$ 5 evaluaciones de f $\Rightarrow$ (+) COSTOSA

$N=1 \Rightarrow$ 3 evaluaciones de f

ii) Precisa numéricamente: Se mira la expresión del error:

$N=2 \Rightarrow 1/2^4 \Rightarrow$ (+) PRECISA

$N=1 \Rightarrow 1$

iii) Exacta: Se mira la expresión del error:

$f^{IV)}(\xi)$ exacta $\{1, x, x^2, x^3\} \Rightarrow$ (=) DE EXACTAS

1.3. ¿QUÉ REPRESENTAN LOS PESOS?

Sea $\int_a^b f \simeq \sum_{i=0}^{2} c_i f(x_i) \Rightarrow$ ¿Qué representan los pesos $\{c_i\}$ en los nodos $\{x_i\}$?

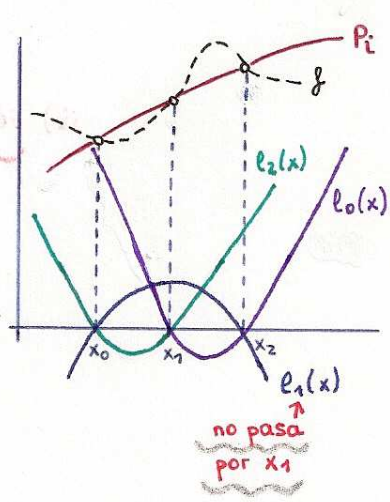
$\{[x_i]\}_0^2,\ [a,b] \longrightarrow P_2(x)$ polinomio de grado 2 $\longrightarrow \int_a^b f \simeq \int_a^b P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} c_i f(x_i)$

pesos

Veamos otra forma de entender los pesos $\{c_i\}$:

$P_2(x)$ = Suma de polinomios de grado 2 elementales.

$$\int_a^b f \simeq \int_a^b P_2(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot f(x_i) = \underset{\text{cte}}{c_0} f(x_0) + \underset{\text{cte}}{c_1} f(x_1) + \underset{\text{cte}}{c_2} f(x_2)$$

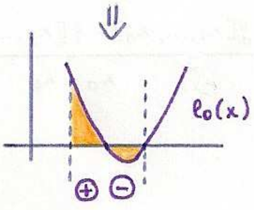


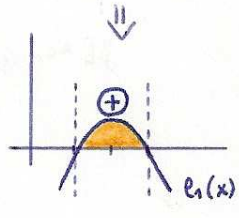
$$P_2(x) = f(x_0)\,\ell_0 + f(x_1)\,\ell_1 + f(x_2)\,\ell_2 \Rightarrow \boxed{c_i = \int_a^b \ell_i(x)\,dx}$$

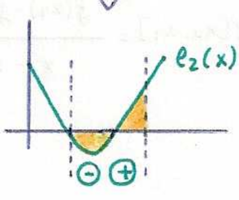
polinomios de Lagrange

$c_0 = \int_a^b \ell_0(x)\,dx \qquad c_1 = \int_a^b \ell_1(x)\,dx \qquad c_2 = \int_a^b \ell_2(x)\,dx$

$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$







(9/4/2008)

2. FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN DE TIPO INTERPOLATORIO.

a) PROBLEMA DE INTERPOLACIÓN:

Dados f, $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \Rightarrow$ n+1 nodos, existe un único $P_n \in \mathcal{P}_n$ (polinomios de grado $\leq n$) que verifica:

$$\boxed{P_n(x_i) = f(x_i)} \qquad i = 0, \dots, n$$

* **CONSTRUCCIÓN DEL POLINOMIO.-** Hay 3 formas de hacerlo

i) BASE DE LAGRANGE:

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, \ell_i(x)} \qquad \boxed{\underset{i=0,\dots,n}{\ell_i(x)} = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}}$$

↳ FÓRMULA DE LAGRANGE

↳ POLINOMIOS DE LAGRANGE

La serie de polinomios $\{\ell_0, \dots, \ell_n\}$ forman la base de Lagrange. Los polinomios de Lagrange están definidos en términos del soporte, así que si el soporte cambia, cambian también los polinomios.

ii) FÓRMULA DE NEWTON: Tabla de diferencias divididas.

$$\boxed{\begin{aligned} P_n(x) = {} & f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \\ & + \dots + f[x_0, x_1, \dots x_n](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) \end{aligned}}$$

$$f[x_0] = f(x_0) \qquad f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$\vdots$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

iii) IMPONER CONDICIONES: (A mano)

$$\boxed{P_n(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n}_{n+1 \text{ coeficientes}}}$$

$P_n(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, \dots, n \implies n+1$ condiciones

* EXPRESIÓN DEL ERROR.-

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \underbrace{(x - x_0) \dots (x - x_n)}_{\Pi_n(x)} ;$$

$f \in C^{n+1)} \equiv$ Clase $(n+1) \equiv f$ tiene $n+1$ derivadas contínuas.

$\exists\, \xi_x \in [a, b]$

$$\boxed{E_n(x) = \frac{f^{n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \cdot \Pi_n(x)} \longrightarrow \text{ERROR\_INTERPOLACIÓN}$$

b) PROBLEMA DE INTEGRACIÓN:

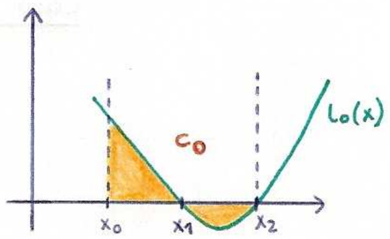
Dados $f, \{x_i\}_{i=0}^{n} \implies (n+1)$ nodos, $[a, b]$ intervalo de integración.

* FÓRMULA.- $\exists\, !$ fin

$$\int_a^b f \simeq \int_a^b P_n(x)\,dx = \int_a^b \underbrace{\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, \ell(x_i)}_{P_n(x)} = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot \underbrace{\int_a^b \ell(x_i)\,dx}_{c_i = \text{peso}} = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot f(x_i)$$

c_i depende de los nodos y de $[a, b]$

c_i no depende de f, sino no se podría programar.



* ERROR DE INTEGRACIÓN.-

$$f = P_n + Err \longrightarrow \int_a^b f = \int_a^b P_n + \underbrace{\int_a^b Err}_{R(f)} \; ;$$

$\Big\downarrow f \in C^{n+1)}$

$R(f) \Rightarrow$ Error_ Integración

$$\boxed{R(f) = \int_a^b \frac{f^{n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \cdot \Pi_n(x)\, dx}$$

* CONCLUSIÓN.-

Dados f, $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ nodos, $[a,b]$. Todas las $f$in son de tipo interpolatorio:

$$\boxed{\int_a^b f = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) + \int_a^b \frac{f^{n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \cdot \Pi_n(x)\, dx} \quad \boxed{1}$$

↳ Es de orden n.

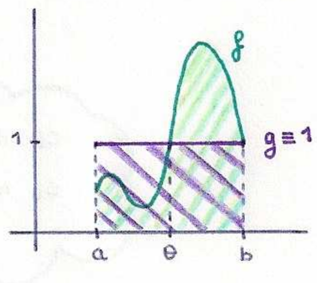
DEFINICIÓN: Cuando los nodos $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ fijados a priori son equidistantes, la $f$in $\boxed{1}$ se llama de NEWTON - CÔTES.

Resultado auxiliar → VALOR MEDIO INTEGRAL:

Sean $f, g \in C([a,b])$ / g no cambia de signo en $[a,b]$.

Entonces: $\left[\exists\, \theta \in [a,b] \;/\; \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(\theta) \cdot \int_a^b g(x)\, dx \right]$

Caso particular → $g \equiv 1 \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx = f(\theta) \cdot (b-a)$



2.1. FÓRMULAS DE NEWTON-CÔTES.

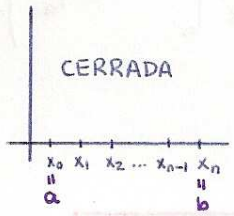
Son fin de tipo interpolatorio con nodos equidistantes:

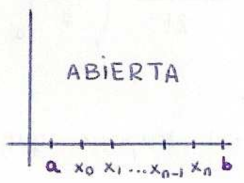
$$x_{i+1} = x_i + h \quad , \quad i = 0, \dots, n-1 \quad , \quad h = \text{tamaño del paso.}$$

Sea $[a,b]$ el intervalo interpolatorio de integración:

* Si $x_0 = a$ y $x_n = b$ se llaman CERRADAS.

* Si $x_0 = a+h$ y $x_n + h = b$ se llaman ABIERTAS.





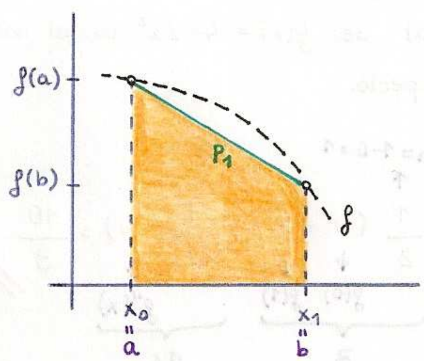
* CONSTRUCCIÓN DE FÓRMULAS DE NEWTON-CÔTES.

a) FÓRMULA DEL TRAPECIO: Fórmula de N-C cerrada de 2 nodos ($\overset{\text{subintervalos}}{n=1}$).

$$\underbrace{x_0 = a \;,\; x_1 = b}_{\text{cerrada}} \;,\; \text{Interp. } \underbrace{\{x_0, x_1\}}_{\text{nodos}} \;,\; \text{Integr. } [a,b] \;,\; h = b-a$$

FÓRMULA:

$$\int_a^b f \simeq \int_a^b P_1 = \text{area\_trapecio\_inscrito} = \boxed{\frac{(b-a)}{2}\big(f(a) + f(b)\big)}$$



EXPRESIÓN DEL ERROR:

$$R(f) = \int_a^b \underbrace{Err(x)}_{\downarrow \; f[x_0, x_1, x](x-x_0)(x-x_1)} dx = \int_a^b \frac{f^{\overset{n+1}{2)}}(\xi_x)}{2!} \underbrace{\underbrace{(x - \overset{a}{\overset{\shortparallel}{x_0}})}_{\geq 0} \underbrace{(x - \overset{b}{\overset{\shortparallel}{x_1}})}_{\leq 0}}_{\leq 0 \text{ (signo cte)}} dx \xrightarrow{\text{Valor Medio Integral}}$$

a x b

$$\rightarrow = \frac{f^{2)}(\theta)}{2!} \int_a^b (x-a)(x-b)\, dx = \frac{f^{2)}(\theta)}{2!} \int_a^b (x^2 - (a+b)x + ab)\, dx =$$

$$= \frac{f^{2)}(\theta)}{2!} \left(\frac{x^3}{3}\Big|_a^b - (a+b)\frac{x^2}{2}\Big|_a^b + abx\Big|_a^b \right) = \underline{- \frac{(b-a)^3}{12} \cdot f^{2)}(\theta)}, \; \theta \in [a,b]$$

La fórmula del trapecio queda:

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_a^b f = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right) - \frac{h^3}{12} \cdot f^{2)}(\theta) \\ &\text{con:} \\ &x_0 = a, \quad x_1 = b, \quad h = b - a \end{aligned}}$$

→ Orden 1.

→ FÓRMULA DEL TRAPECIO

TABLA:

NODOS $\{x_i\}$	a	b
PESOS $\{c_i\}$	$\frac{b-a}{2}$	$\frac{b-a}{2}$

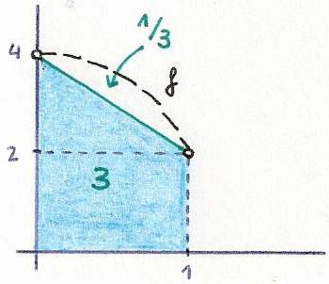
* EJEMPLO:

Calcular la integral de $f(x) = 4 - 2x^2$ en el intervalo $[\overset{x_0}{\overset{\shortparallel}{0}}, \overset{x_1}{\overset{\shortparallel}{1}}]$ usando la fórmula del trapecio.

$$\int_0^1 (4 - 2x^2)\, dx = \frac{1}{\underset{\uparrow}{2}} \underbrace{(\underset{\downarrow f(0)}{4} + \underset{\downarrow f(1)}{2})}_{3} - \frac{1}{12}\underbrace{(\underset{\downarrow f''(x)}{-4})}_{1/3} = \frac{10}{3}$$

$h = 1 - 0 = 1$

$3 = $ area_trapecio



b) FÓRMULA DE SIMPSON: Fórmula de N-C cerrada de 3 nodos ($n = 2$).

subintervalos

$$x_0 = a \quad , \quad x_1 = \frac{a+b}{2} \quad , \quad x_2 = b \quad , \quad h = \frac{b-a}{2}$$

punto medio

FÓRMULA:

Calculo $P_2 \Rightarrow P_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2]\underbrace{(x - x_0)(x - x_1)}_{x^2 - (x_0 + x_1)x + x_0 x_1}$;

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\underbrace{x_1 - x_0}_{= h}}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{\underbrace{x_2 - x_1}_{= h}} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{\underbrace{x_2 - x_0}_{= 2h}} =$$

$$= \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{2h^2}$$

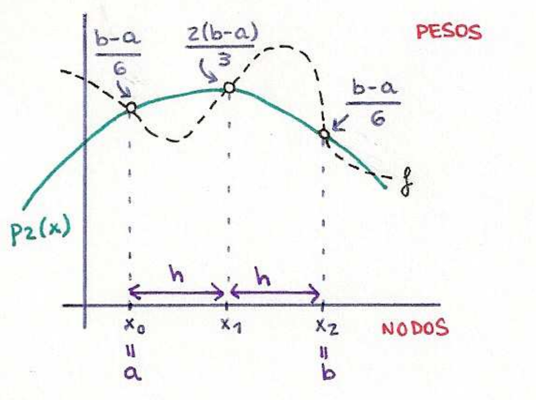
$$\int_a^b P_2(x)\,dx = f[x_0].x\Big]_a^b + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h}\left(\frac{x^2}{2} - x_0.x\right)\Bigg]_a^b +$$

$$+ \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{2h^2}\left(\frac{x^3}{3} - (x_0 + x_1).\frac{x^2}{2} + x_0 x_1 x\right)\Bigg]_a^b =$$

$$= \boxed{\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{3} . h} \quad h \to \frac{b-a}{2}$$

TABLA:

NODOS $\{x_i\}$	a	$\frac{a+b}{2}$	b
PESOS $\{c_i\}$	$\frac{b-a}{6}$	$\frac{2(b-a)}{3}$	$\frac{b-a}{6}$

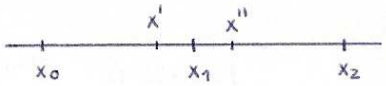


Caso particular $\rightarrow$ $f = 1 \Rightarrow \int_a^b 1 = \underbrace{\frac{b-a}{2}}_{h} \cdot \left(\frac{1+4+1}{3}\right) = b-a$

EXPRESIÓN DEL ERROR:

$$R(f) = \int_{a=x_0}^{b=x_2} E_2(f)\,\Pi_2(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} \underbrace{f[x_0, x_1, x_2, x]}_{\text{Lo despejamos luego}} \underbrace{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}_{\Pi_2}\,dx \quad (*)$$

$$\Pi_2(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$



$\Rightarrow \quad x'' - x_1 = x_1 - x'$

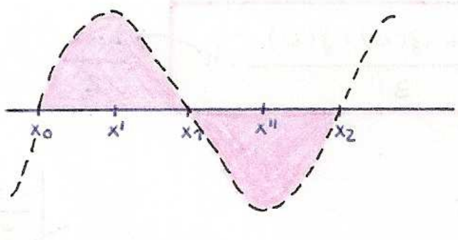
Vamos a ver cuánto vale Π_2 en x' y x'' y comparamos:

$$\left.\begin{array}{l} \Pi_2(x') = (x'-x_0)(x'-x_1)(x'-x_2) \\ \Pi_2(x'') = (x''-x_0)(x''-x_1)(x''-x_2) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} (x'-x_1) = -(x''-x_1) \\ (x'-x_0) = -(x''-x_2) \\ (x'-x_2) = -(x''-x_0) \end{array}\right\} \Pi_2(x') = -\Pi_2(x'')$$

(Para esto se eligen las fórmulas cerrad)

Π_2 tiene simetría impar respecto de x_1 : $\Pi_2(-x) = -\Pi_2(x)$



$$\Rightarrow \int_{a=x_0}^{b=x_2} \Pi_2(x)\,dx = 0$$

Ahora vamos a añadir x_3:

Despejar

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x] = \frac{f[x_0,x_1,x_2,x] - f[x_0,x_1,x_2,x_3]}{x-x_3} \quad ;$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x] = f[x_0,x_1,x_2,x_3,x].(x-x_3) + f[x_0,x_1,x_2,x_3] \quad ;$$

$$R(f) = \int_a^b f[x_0,x_1,x_2,x]\,\overbrace{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}^{\Pi_2(x)}\,dx =$$

$$= \int_a^b f[x_0,x_1,x_2,x_3,x].\Pi_2(x).(x-x_3) + \underbrace{\int_a^b \underbrace{f[x_0,x_1,x_2,x_3]}_{cte}.\,\Pi_2(x)\,dx}_{=0} = \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{x_3=x_1\\ \text{(lo fijo yo)}}]{} = \int_{a=x_0}^{b=x_2} \underbrace{f[x_0,x_1,x_2,x]}_{\exists \xi_x \,/\, \frac{f^{IV)}(\xi_x)}{4!}}\,\underbrace{\underbrace{(x-x_0)}_{\geq 0}\underbrace{(x-x_1)^2}_{\geq 0}\underbrace{(x-x_2)}_{\leq 0}}_{\leq 0 \text{ (signo cte)}}\,dx = \xrightarrow{\text{Valor Medio Integral}}$$

$$\longrightarrow = \frac{f^{IV)}(\theta)}{4!}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)\,dx = \ldots = -\frac{f^{IV)}(\theta)}{90}.h^5 \quad , \theta \in [a,b]$$

La fórmula de Simpson queda:

$$\boxed{\int_a^b f = \frac{h}{3}\Big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\Big) - \frac{f^{IV)}(\theta)}{90}.h^5}$$

con:

$x_0 = a \quad , \quad x_2 = b \quad , \quad x_1 = x_0 + h = \dfrac{a+b}{2} \quad , \quad h = \dfrac{b-a}{2}$

→ Orden 3

→ **FÓRMULA DE SIMPSON.**

f.i.n. de tipo interpolatorio de $(n+1)$ nodos (n subintervalos):

son de $\begin{cases} \text{orden } n \text{ si } (n+1) \text{ par} \\ \text{orden } n+1 \text{ si } (n+1) \text{ impar} \end{cases}$

(15/4/2008)

TIPOS DE PROBLEMAS.

i) Comparar prestaciones numéricas.

[valor_exacto] - [valor_aproximado]

ii) Construir fin dados: nodos, condiciones de interpolación, intervalo de integración.

iii) Fórmula de Gauss.

iv) Cambio de variable.

Dado $\int_a^b f \simeq \text{fin} \longrightarrow$ Obtener $\int_c^d f \simeq (\text{fin})'$

v) Calcular nº subintervalos dado: fin, cota.

|error_integración| < cota

vi) Integración 2D

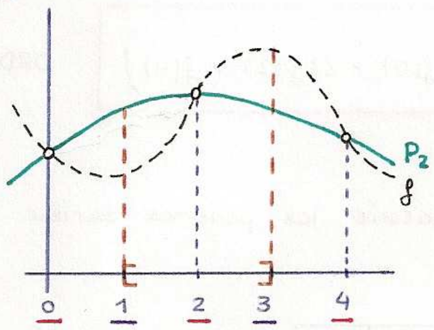
- → Integración 1D $\begin{cases} \text{N-C} \\ \text{Gauss} \end{cases}$
  - → fin_compuesta

* EJEMPLO:

Calcular C_0, C_1, C_2 para que $\int_1^3 f = C_0 f(0) + C_1 f(2) + C_2 f(4) + R(f)$

alcance el orden máximo. Calcular la expresión de $R(f)$.

SOLUCIÓN:



condiciones $\int_1^3 f \simeq C_0 f(0) + C_1 f(2) + C_2 f(4)$

PASOS:

1. CALCULAR $f$in: FÓRMULA DE NEWTON. / MÉTODO COEFICIENTES INTERMEDIOS. → (Muy rápido. Imponer exactitud).

2. CALCULAR $R(f)$: $f = P_2 + E_2(f) \longrightarrow R(f) = \int_1^3 E_2(f)$

Vamos a hacerlo:

① CALCULAR $f$in.- MÉTODO COEFICIENTES INTERMEDIOS.

Imponer exactitud para polinomios en $\boxed{1}$

Nº incógnitas = 3 ⟹ Impongo exactitud $\{1, x, x^2\}$

$\boxed{1}$ exacta para $f = 1 \equiv \int_1^3 1 = C_0 + C_1 + C_2 \Rightarrow 2 = C_0 + C_1 + C_2$

$\boxed{1}$ exacta para $f = x \equiv \int_1^3 x = C_0 \cdot 0 + C_1 \cdot 2 + C_2 \cdot 4 \Rightarrow 4 = 2C_1 + 4C_2$

$\boxed{1}$ exacta para $f = x^2 \equiv \int_1^3 x^2 = C_0 \cdot 0 + C_1 \cdot 4 + C_2 \cdot 16 \Rightarrow \frac{26}{3} = 4C_1 + 16C_2$

Sistema Lineal con 3 ecuaciones y 3 incógnitas $\left\{ \begin{array}{l} c_0 + c_1 + c_2 = 2 \\ 2c_1 + 4c_2 = 4 \\ 4c_1 + 16c_2 = 26/3 \end{array} \right\} \Rightarrow$ $c_0 = c_2 = \dfrac{1}{12}$, $c_1 = \dfrac{11}{6}$

Hemos encontrado la fórmula:

$$\boxed{\int_1^3 f = \frac{1}{12}\left(f(0) + 22f(2) + f(4)\right)} \quad \text{ORDEN 2}$$

Las fórmulas de tipo interpolatorio las podemos escribir como una tabla de nodos y pesos:

x_i	0	2	4
c_i	$1/12$	$11/6$	$1/12$

¿Es de orden 3? Para ello se debe cumplir:

$$\int_1^3 x^3 = \frac{1}{12}\left(0 + 22.8 + 64\right) \; ; \quad \left.\frac{x^4}{4}\right]_1^3 = \frac{240}{12} \; ; \quad \underline{\underline{20 = 20}}$$

Se cumple $\Rightarrow$ Es de ORDEN 3.

② EXPRESIÓN DEL ERROR.-

$$R(f) = \int_1^3 E_2(f) = \int_1^3 \frac{f^{\overset{n+1}{\overbrace{\,\,}}\,'''}(\xi_x)}{3!}\,(x-\overset{0}{\overset{\parallel}{x_0}})(x-\overset{2}{\overset{\parallel}{x_1}})(x-\overset{4}{\overset{\parallel}{x_2}})\,dx =$$

$$= \int_1^3 \frac{f'''(\xi_x)}{3!}\,\underbrace{x(x-2)(x-4)}_{\text{Simpson} \rightarrow \Pi_2} = \int_1^3 \frac{f^{4)}(\xi)}{4!}\,\underbrace{\underbrace{x}_{\geq 0}\,\underbrace{(x-2)^2}_{\geq 0}\,\underbrace{(x-4)}_{\leq 0}}_{\text{signo constante}}\,dx = \longrightarrow$$

Π_2 impar en todo el intervalo de integración $[1,3]$ respecto al centro $x_1 = 2$. $\Big\}$ SÍ $\Rightarrow$ PUNTO ARTIFICIAL

Valor Medio Integral $\longrightarrow$ $$\frac{f^{4)}(\theta)}{4!} \cdot \int_1^3 x(x-2)^2(x-4)\,dx = \underbrace{\frac{f^{4)}(\theta)}{4!}\left(\frac{x^5}{5} - 2x^4 + \frac{20}{3}x^3 - 8x^2\right)\Bigg]_1^3}$$

Depende de la 4^{a} derivada => ORDEN 3.

Expresión del error con el mejor formato posible.

Comparar $\boxed{1}$ con Simpson $[0,4]$. ¿Qué elementos son comunes a ambas?

* Comunes $\rightarrow$ NODOS y CONDICIONES
* Distintos $\rightarrow$ INTERVALOS DE INTEGRACIÓN

$$\begin{cases} \boxed{1} \rightarrow [1,3] \\ \text{Simpson} \rightarrow [0,4] \end{cases}$$

¿Qué más?

* P_2 es el mismo.
* E_2 es el mismo.
* $R(f)$ son distintas.
* Error integración distinto.
* C_0, C_1, C_2 distintos

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{1} \displaystyle\int_1^3 P_2 \\ \text{Simpson} \displaystyle\int_0^4 P_2 \end{array}\right\} \text{Distintas fin.}$$

— FIN INTEGRACIÓN NUMÉRICA DE TIPO INTERPOLATORIO. —

(16/4/2008)

3. FÓRMULAS COMPUESTAS.

Lo que vamos a mejorar es la precisión.
Queremos aplicar una fórmula con el menor error posible.

ESTRATEGIA: El intervalo de integración $[a,b]$ lo subdividimos en N subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, N$ y aplicamos en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ la fin:

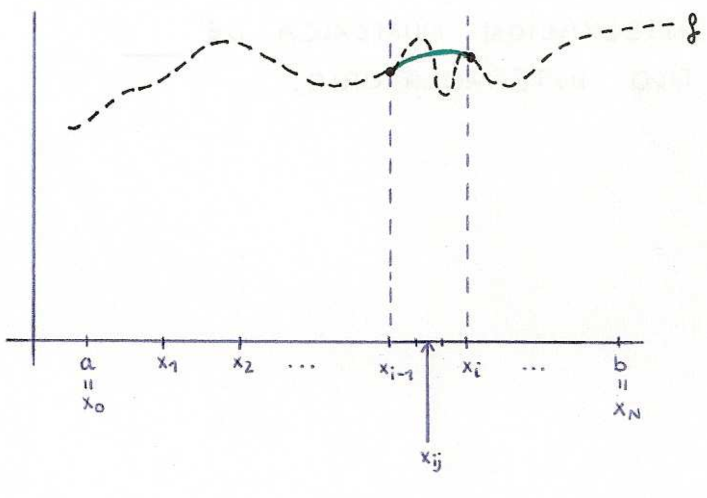
NODOS	x_{ij}, $j = 1, \ldots, n$
PESOS	c_{ij}, $j = 1, \ldots, n$

Integral en un subintervalo $\rightarrow \displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_i} f \simeq \sum_{j=0}^{n} c_{ij} f(x_{ij})$

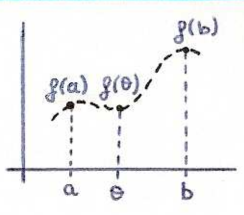
FIN COMPUESTA $\rightarrow \displaystyle\int_a^b f = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N} c_{ij} f(x_{ij}) + \sum_{i=1}^{N} R_i(f)$

Todas las fórmulas simples se pueden convertir en compuestas. Simplemente hay que sumar lo obtenido con cada fórmula simple en cada subintervalo.

No es complicado, lo lioso es la notación.



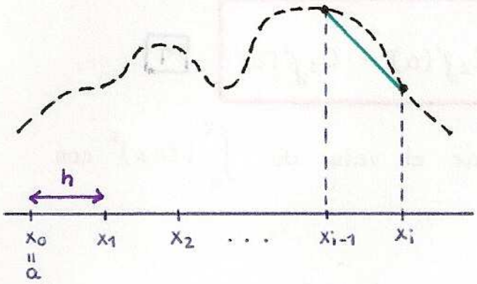
* TEOREMA DEL VALOR MEDIO DE LA FUNCIÓN CONTÍNUA:



f contínua $\rightarrow \boxed{\exists\theta \,/\, f(\theta) = \dfrac{f(a)+f(b)}{2}}$

3.1. REGLA DEL TRAPECIO COMPUESTA.

$[a,b]$, $N = n^{\underline{o}}$ intervalos , $h = \frac{b-a}{N} = $ cte $=$ Longitud de cada intervalo.



$x_i = a + ih$

FÓRMULA SIMPLE:

$$\int_a^b f = (b-a).\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right) - \frac{(b-a)^3}{12}.f^{2)}(\theta)$$

De la simple pasamos a la compleja.

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f = h.\left(\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\right) - \frac{h^3}{12}.f^{2)}(\theta_i) \ , \ \theta_i \in [x_{i-1}, x_i] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \int_a^b f = \sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} h.\left(\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\right)}_{1} - \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\frac{h^3}{12}.f^{2)}(\theta_i)}_{2} \ ;$$

1 $= \frac{h}{2}.\left(f(a) + 2.\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + f(b)\right)$

2 $= \frac{h^3}{12}.\sum_{i=1}^{N} f^{2)}(\theta_i) = \frac{h^2}{12}.\underbrace{\frac{b-a}{N}}_{h}.\sum_{i=1}^{N} f^{2)}(\theta_i) = \frac{h^2}{12}.(b-a).\sum_{i=1}^{N}\frac{f^{2)}(\theta_i)}{N}$

Necesito un N y lo saco de $h = \frac{b-a}{N}$

$T^{\underline{o}}$ del Valor Medio

$f^{2)} \in [a,b]$, $\exists \theta \Rightarrow f^{2)}(\theta)$

Por tanto:

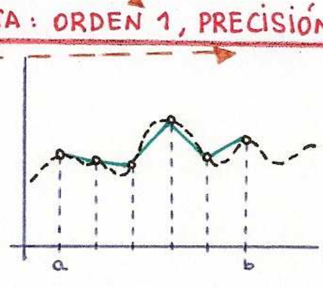
$$\boxed{\int_a^b f = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2.\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + f(b)\right) - \frac{h^2}{12}(b-a).f^{2)}(\theta) \ , \ \theta = [a,b]} \ (*)$$

(Poco exacta y poco precisa)

FIN TRAPECIO COMPUESTA: ORDEN 1, PRECISIÓN 2.

(*) $\frac{(b-a)^3}{12.N^2}.f^{2)}(\theta) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$, $O\left(\frac{1}{N^2}\right)$

si $N \to \infty$
$1/N \to 0$
$1/N^2 \to 0$
$1/N^3 \to 0$ → orden de magnitud superior y con velocidad de convergencia mayor.



(17/4/2008)

3.2. FÓRMULA DEL TRAPECIO CORREGIDA COMPUESTA.

Calcular fin. en el espacio de polinomios de la forma:

$$\boxed{\int_a^b f \simeq C_0 f(a) + C_1 f(b) + C_2 f'(a) + C_3 f'(b)} \quad \boxed{1}$$

Construir fin. compuesta para aproximar el valor de $\int_1^2 (\ln x)^2$ con un error $< 10^{-3}$.

Solución:

1º) Pintar la gráfica.

2º) Identificar el polinomio de interpolación. Calcular el polinomio y la expresión del error.

3º) Calcular fin. y el error de integración.

4º) Construir fin compuesta.

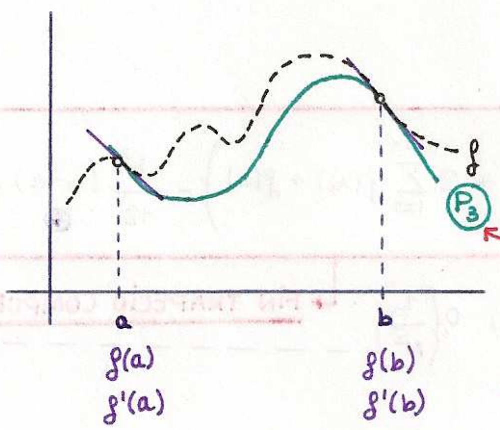
5º) Calcular el nº de intervalos para que el error de la fin compuesta sea menor que la cota (10^{-3}).

6º) Aplicar fin compuesta con el nº de intervalos (N) hallado.

Nodos intervalo	a	a	b	b
Condiciones intervalo	$f(a)$	$f'(a)$	$f(b)$	$f'(b)$

Intervalo de integración → $[a,b]$

GRÁFICA



← porque tengo 4 condiciones.

⇒ Polinomio de Hermite

NODOS CONDICIONES

Construir P_3 : Polinomio de Hermite $\left\{ \begin{array}{cc} a & b \\ f(a) & f(b) \\ f'(a) & f'(b) \end{array} \right.$

$\hookrightarrow$ Para hallarlo utilizo la fórmula de Newton.

FÓRMULA DE NEWTON:

$$\boxed{f(x) = \underbrace{f[a] + f[a,a](x-a) + f[a,a,b](x-a)^2 + f[a,a,b,b](x-a)^2(x-b)}_{P_3} + \underbrace{f[a,a,b,b,x](x-a)^2(x-b)^2}_{E(f)}}$$

$$f[a,a,b,b,x] \longrightarrow \frac{f^{4)}(\theta)}{4!} = \exists\, \theta_x$$

Para calcular los coeficientes (diferencias divididas) utilizamos la tabla de siempre.

TABLA DE LAS DIFERENCIAS DIVIDIDAS:

	$f[a]$	$f[a,a]$	$f[a,a,b]$	$f[a,a,b,b]$
a	$f(a)$			
		$f'(a)$		
a	$f(a)$		$\dfrac{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(a)}{b-a}$	
		$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$		$\dfrac{f'(b)+f'(a)}{(b-a)^2} - 2\cdot\dfrac{f(b)-f(a)}{(b-a)^3}$
b	$f(b)$		$\dfrac{f'(b) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}{b-a}$	
		$f'(b)$		
b	$f(b)$			

CALCULAR fin:

$$fin = \int_a^b P_3 = f(a)(b-a) + f'(a)\left(\frac{b^2-a^2}{2} - a(b-a)\right) + \cdots =$$

$$= \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right] + \frac{(b-a)^2}{12}\cdot\left[f'(a)-f'(b)\right]$$

CALCULAR ERROR INTEGRACIÓN.

$$R(f) = \int_a^b \frac{f^{4)}(\theta_x)}{4!}(x-a)^2(x-b)^2\,dx \xrightarrow{\text{Valor Medio Integral}}$$

$$\longrightarrow \frac{f^{4)}(\theta)}{4!}\cdot\int_a^b (x-a)^2\cdot(x-b)^2\,dx = \dots = \frac{f^{4)}(\theta)}{720}(b-a)^5$$

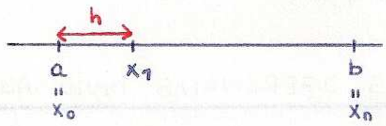
Las escribimos juntas:

$$\left[\int_a^b f = \frac{b-a}{2}\left[f(a)-f(b)\right] + \frac{(b-a)^2}{12}\left[f'(a)-f'(b)\right] + \frac{f^{4)}(\theta)}{720}(b-a)^5\right]$$

CONSTRUIR FIN COMPUESTA.

En $[a,b]$, $h = \frac{b-a}{N}$, $N = n^{\underline{o}}$ intervalos

$x_i = x_0 + ih$, $i = 1, \dots, N$



i) $f$in compuesta:

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f \simeq \sum_{i=1}^{n}\frac{h}{2}\left[f(x_{i-1})+f(x_i)\right] + \frac{h^2}{12}\left[f'(x_{i-1})-f'(x_i)\right] =$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\right] + \frac{h^2}{12}\left[f'(a)-f'(b)\right]$$

Al final hemos evaluado los nodos de los extremos una vez y los intermedios dos veces cada uno.

ii) Error compuesto:

$$R(f) = \sum_{i=1}^{n} R_i(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{4)}(\theta_i)}{720} \cdot h^5 = \frac{h^4(b-a)}{720} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{4)}(\theta_i)}{N} = \frac{h^4(b-a)}{720} \cdot f^{4)}(\theta)$$

Tenemos la fórmula compuesta:

$$\boxed{\begin{aligned}\int_a^b f &= \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)+2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]}_{\text{trapecio}} + \underbrace{\frac{h^2}{12}\left[f'(a)-f'(b)\right]}_{\text{corregida}} + \\ &+ \underbrace{\frac{h^4(b-a)}{720} f^{4)}(\theta)}_{R(f)} \rightarrow \frac{1}{N}\cdot\frac{(b-a)^5}{720} f^{4)}(\theta) \qquad \theta \in [a,b]\end{aligned}}$$

PRESTACIONES NUMÉRICAS:

Orden 3

Velocidad de convergencia al 0 $\rightarrow O\left(\frac{1}{N^4}\right)$

Modificando un poquito la fin_trapecio con una pequeña corrección, la mejoro fácilmente.

Ahora que tenemos la fórmula, vamos a hacer el ejercicio que nos pedían.

$\longrightarrow$

$\longrightarrow$ Calcular $\int_1^2 (\ln x)^2 dx$ con un error $< 10^{-3}$

¿N?

en valor absoluto

$$|R(f)| = \left| \frac{h^4(b-a)}{720} f^{4)}(\theta) \right| < 10^{-3} \quad ; \quad b=2,\ a=1,\ f(x)=(\ln x)^2,\ h=\frac{b-a}{N}=\frac{1}{N} \quad (*)$$

Tenemos que acotar $f^{4)}(\theta)$ para cuando θ varía en el intervalo que queremos integrar:

$$\left| f^{4)}(\theta) \right| \Big]_{\theta\in[1,2]} = 2\cdot\frac{1}{|x^4|}(11+6|\ln x|) \leq 2\cdot 1\cdot(11+6\cdot 2) = 46$$

$$\begin{cases} x\in[1,2],\ x^4\in[1,2^4],\ \frac{1}{x^4}\in\left[\frac{1}{2^4},1\right],\ \frac{1}{x^4}\leq 1 \\ x\in[1,2],\ \ln x\in[0,\ln 2],\ |\ln x|\leq 2 \end{cases}$$

$$\left[f(x)=\ln^2 x \ ;\ f'(x)=\frac{2\ln(x)}{x} \ ;\ f''(x)=\frac{2\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)}{x^2}=\frac{2(1-\ln x)}{x^2} \right.$$

$$\left. f'''(x)=2\cdot\frac{\left(-\frac{1}{x}\cdot x^2-2x(1-\ln x)\right)}{x^4}=\frac{2(-3+2\ln x)}{x^3} \ ;\ f^{IV)}(x)=\frac{2}{x^4}(11-6\ln x) \right]$$

$(*)$ $$\frac{46}{720}\cdot\frac{1}{N^4}<10^{-3} \ ;\ \frac{46\cdot 10^3}{720}<N^4 \ ;\ 2'8<N \Rightarrow N=3$$

Calcular valor aproximado: $N=3$, $h=1/3$, $a=1$, $b=2$

$$\begin{array}{cccc} a=1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \| & \| & \| & \| \\ x_0 & 4/3 & 5/3 & 2 \end{array}$$

$f(1)=0$, $f'(1)=0$, $f(2)=\ln^2 2$, $f'(2)=\ln 2$

$$\int_1^2 \ln^2 x\,dx \simeq \frac{1}{6}\ 0+\ln^2(2)+2\left[\ln^2\left(\frac{4}{3}\right)+\ln^2\left(\frac{5}{3}\right)\right]+\frac{1}{9\cdot 12}(0-\ln(2)) \simeq \boxed{0'2011}$$

$$\left[\ 0'2011 = 0'2011-10^{-3} \leq \int_1^2 \ln^2 x \leq 0'2011+10^{-3}=0'2021\ \right]$$

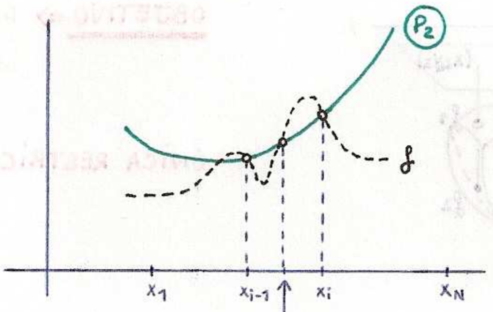
3.3. REGLA DE SIMPSON COMPUESTA.

Intervalo de integración $\rightarrow [a,b]$

N = nº subintervalos , $h = \dfrac{b-a}{N}$ = tamaño del subintervalo.

Nodos $\rightarrow x_i = a + ih$

FÓRMULA SIMPLE $\rightarrow \displaystyle\int_a^b f = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) - \frac{f^{4)}(\theta)(b-a)^5}{90 \cdot 2^5}$;



Aplicamos la fórmula de Simpson a cada subintervalo.

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f = \sum_{i=1}^{N}\frac{h}{6}\left[f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + f(x_i)\right] - \underbrace{\sum_{i=1}^{N} h^5 \cdot \frac{f^{4)}(\theta_i)}{90 \cdot 2^5}}_{1} ;$$

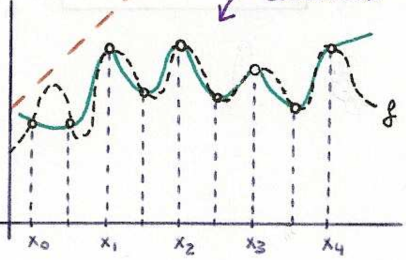
$$1 = \frac{h^5}{90 \cdot 2^5}\cdot\sum_{i=1}^{N} f^{4)}(\theta_i) = \frac{h^4}{90\cdot 2^5}\cdot\frac{b-a}{N^4}\cdot\sum_{i=1}^{N}\frac{f^{4)}(\theta_i)}{N} \xrightarrow{\text{Tª del Valor Medio}} \begin{array}{l} f^{4)} \in [a,b] \\ \exists\theta \Rightarrow f^{4)}(\theta) \end{array}$$

Por tanto:

$$\boxed{\int_a^b f = \sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f = \sum_{i=1}^{N}\frac{h}{6}\left(f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + f(x_i)\right) - \frac{h^4}{90\cdot 2^5}(b-a)\cdot f^{4)}(\theta) \quad \theta\in[a,b]}$$

FIN SIMPSON COMPUESTA: ORDEN 3, PRECISIÓN 4.

Parábolas continuas



PRESTACIONES NUMÉRICAS:

Exactitud = 3

A qué velocidad se va al 0. $\rightarrow$ Precisión $= \dfrac{(b-a)^5}{90\cdot 2^5}\cdot\dfrac{1}{N^4}\cdot f^{4)}(\theta) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$, $O\left(\dfrac{1}{N^4}\right)$

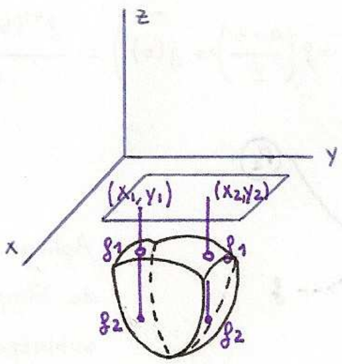
(22/4/2008)

4. FÓRMULAS DE GAUSS.

EJEMPLO: Repsol YPF ha encontrado un yacimiento petrolífero en Brasil.
El problema es: estimar el volumen del yacimiento.

$$\text{valor\_aproximado} = \sum c_{ij} f_1(x_i, y_j) - \sum c_{ij} f_2(x_i, y_j)$$

Objetivo => Minimizar nº de nodos.



OBJETIVO => Mínimo número de nodos y máxima exactitud de la fórmula.

ÚNICA RESTRICCIÓN ≡ INTERVALO INTEGRACIÓN.

MEJORA DE LA BONDAD DE LAS FÓRMULAS => Conseguir exactitud.

$\Downarrow$

Orden máximo.

Dado $[a, b]$ hay 2 estrategias:

1.- TIPO INTERPOLATORIO:

Fijados $n+1$ nodos $\{x_i\}_{i=0}^{n}$, calcular los $n+1$ coeficientes $\{c_i\}_{i=0}^{n}$ tal que:

$$\int_a^b f \simeq \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i)$$ sea de orden máximo.

c_i → calculamos; $f(x_i)$ → fijados

PSEUDOCÓDIGO:

ENTRADA: $[a, b]$, $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ → PROCESO → SALIDA

PROCESO:
Calcular $\{c_i\}_{i=0}^{n}$:

$$\int_a^b x^k = \sum_{i=0}^{n} c_i (x_i)^k \quad k = 0, \dots, n$$

Sistema lineal de ecuaciones:
$(n+1)$ ecs., $(n+1)$ incógnitas

SALIDA:
$$\int_a^b f \simeq \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i)$$
ORDEN n

2. - FÓRMULA DE GAUSS:

Calcular $n+1$ nodos $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ y $n+1$ coeficientes $\{c_i\}_{i=0}^{n}$ tal que:

$$\boxed{1} \quad \boxed{\int_a^b f \simeq \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i)} \quad \text{sea de orden máximo.}$$

hay que calcular ambos

PSEUDOCÓDIGO:

ENTRADA

$[a, b]$

PROCESO

Calcular $\{x_i, c_i\}_{i=0}^{n}$:

$$\int_a^b x^k = \sum_{i=0}^{n} c_i x_i^k \quad k = 0, \dots 2n+1$$

Resolver Sistema No Lineal:

$(2n+2)$ ecs., $(2n+2)$ inc.

SALIDA

$$\int_a^b f \simeq \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i)$$

ORDEN $2n+1$

GAUSS

Problema con el doble de dimensión que el anterior: $k = 0, \dots, n, n+1, \dots, 2n+1$

NECESITAMOS: Un método constructivo, es decir, programable para calcular la solución del sistema no lineal $(2n+2) \times (2n+2)$

OBTENER: $\{x_i, c_i\}_{i=0}^{n}$ para que $\boxed{1}$ sea exacta para:

$$\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^{2n+1}\}$$

DIVIDIMOS EL PROBLEMA:

1^{er} PASO $\Rightarrow$ Calcular x_i para que $\boxed{1}$ sea exacta para los polinomios $\{x^{n+1}, \dots, x^{2n+1}\}$

2^{o} PASO $\Rightarrow$ Calcular x_i para que $\boxed{1}$ sea exacta para los polinomios $\{1, \dots, n\}$

ESTRATEGIA:

Subdividir el problema en 2 problemas de tamaño $(n+1) \times (n+1)$

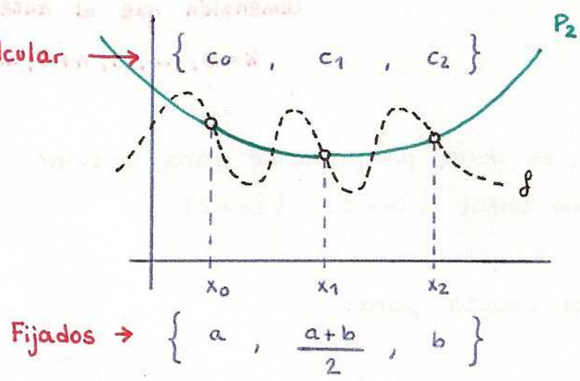
PROCEDIMIENTO:

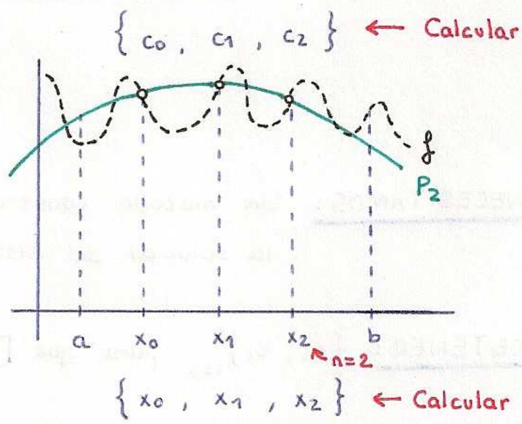
1º) Calcular $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ para que $\boxed{1}$ sea exacta para $\{x^{n+1}, \dots, x^{2n+1}\}$ para cualquier c_i.

2º) Fijados $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ calcular $\{c_i\}_{i=0}^{n}$ para que $\boxed{1}$ sea exacta para $\{1, \dots, x^n\}$

* EJEMPLO:

Comparar fórmula 3 nodos $\begin{cases} \text{equidistantes: Simpson.} \\ \text{no equidistantes: Gauss.} \end{cases}$





SIMPSON

$\boxed{1}$ orden 3

GAUSS

$\boxed{1}$ orden 5 ($\uparrow$ 2n+1)

Solución intuitiva: Fórmula de Gauss de 3 nodos:

$$\text{Queremos } \int_a^b f = \sum_{i=0}^{2 \, (=n)} c_i f(x_i) + \int_a^b \underbrace{E_2(f)}\,dx \longrightarrow \text{Exacta para } \underbrace{\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}}$$

$$\hookrightarrow \frac{f^{3)}(\xi_x)}{3!} \underbrace{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}_{\Pi_2(x)}$$

$\boxed{1}$ exacta para estos polinomios.

* **1er PASO:** Calcular $\{x_0, x_1, x_2\}$ tal que $\underbrace{R\left(P_k(x)\right)=0}_{\parallel}$, $P_k(x)$ polinomios de grado $k = 3, 4, 5$.

$$\frac{1}{3!}\int_a^b \underbrace{\left(P_k(x)\right)^{3)}}_{} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$\rightarrow P_{k-3}(x) \rightarrow$ Polinomio de grado 0, 1, 2 (porque hemos derivado 3 veces el polinomio de grado 3, 4, 5)

Reescribimos su condición:

* Calcular $\{x_0, x_1, x_2\}$ tal que $\int_a^b P_k(x).\underbrace{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}_{f \rightarrow q_3(x)} = 0$,,

$P_k(x)$ polinomio de grado 2.

* Cambiamos "entorno":

$$\boxed{f, g \in C \quad , \quad \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = (f, g)}$$ **PRODUCTO ESCALAR CONTINUO**

$(f, g) = 0 \Rightarrow f, g$ ortogonales

NECESITAMOS: f ,, f sea ortogonal a todos los polinomios de grado ≤ 2. y suponemos $f \in \mathcal{P}_3$ // Tenemos q_3.

Por tanto, el PRIMER PASO FÓRMULA DE GAUSS lo subdividimos en 2 apartados:

1er APARTADO: Sea $[a, b]$. Calcular $q_3(x)$ polinomio de grado 3 tal que:

$$\int_a^b p(x)\, q_3(x)\, dx = 0 \quad \forall\, p(x) \text{ polinomio grado } \leq 2.$$

2º APARTADO: Los $\{x_0, x_1, x_2\}$ raíces de q_3 son los NODOS de la Fórmula de Gauss.

SOLUCIÓN: Dado $[a,b]$ " $\int_a^b f \simeq c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$ es la única fórmula de 3 nodos de tipo interpolatorio que alcanza el orden 5. Además, el orden es máximo $\Rightarrow$ No hay ninguna fórmula que se pueda escribir como ésta y sea de orden 6.

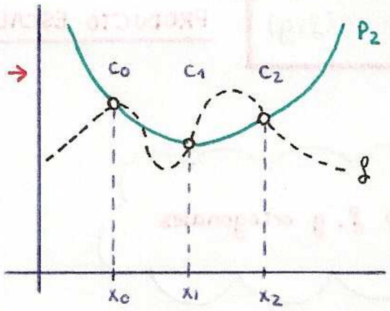
Solución (Problema { fin mínimo nº evaluaciones, máx. orden }) ≡ F. GAUSS

(23/4/2008)

RESUMEN

Comparar fórmulas 3 nodos $\begin{cases} \text{Simpson} \\ \text{Gauss} \end{cases}$

SIMPSON:

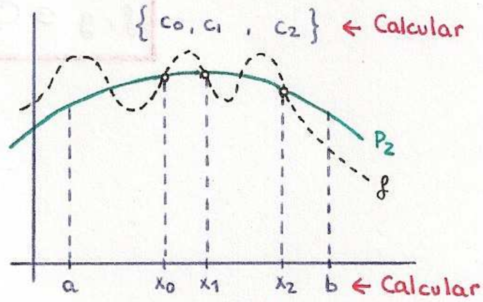


Fijos → a $\frac{a+b}{2}$ b ← NODOS EQUIDISTANTES

$\boxed{1}$ ORDEN 3

GAUSS:

$\{c_0, c_1, c_2\}$ ← Calcular



NODOS NO EQUIDISTANTES

$\boxed{1}$ ORDEN 5

Exacta para todos los polinomios de orden 5

2º PASO

$$\int_a^b x^k = \sum_{i=0}^{2} c_i x_i^k \quad , \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

1º PASO

NOTA: Gauss es siempre un problema de dimensión par.

$\boxed{1}$ $\int_a^b f \simeq \sum_{i=0}^{2} c_i f(x_i)$ con orden máximo.

* **1^{er} PASO:**

$$\left.\begin{array}{l} R(x^k)=0 \ , \quad k=3,4,5 \\ \\ \dfrac{1}{3!}\cdot\displaystyle\int_a^b f^{3)}(x^k)\underbrace{(x-\underset{\text{Incógnitas}}{x_0})(x-x_1)(x-x_2)}_{\Pi_2(x) \text{ polinomio grado } 3}\,dx \end{array}\right\} \longrightarrow$$

Incógnitas: x_0, x_1, x_2

$\longrightarrow$ Sea P_3 polinomio de grado 3 tal que $\int_a^b P_3(x)P_2(x)\,dx = 0 \ \forall P_2(x)$ (polinomio grado ≤ 2)

Elijo $\underbrace{\{x_0, x_1, x_2\}}_{\text{Nodos de Gauss}}$ raíces ($\mathbb{R}$ simples distintas) de P_3 $\longrightarrow$

$$\longrightarrow \begin{cases} \Pi_2(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ \\ x^k \ , \ k=3,4,5 \quad ; \quad R(x^k) = \displaystyle\int_a^b \underbrace{\frac{(x^k)^{3)}}{3!}}_{\text{Polinomio grado} \leq 2}\Pi_2(x)\,dx = 0 \end{cases}$$

Hay solución al P. Gauss $\Longleftrightarrow$ $\exists$ solución $\int_a^b P_3(x)P_2(x)\,dx = 0 \ , \ \forall P_2(x)$

* **2^{o} PASO:**

Calcular $\{c_i\}_{i=0}^2$ tal que $\int_a^b x^k = \sum_{i=0}^{2} c_i x_i^k \ , \ k=0,1,2$

x_i: $\mathbb{R}$ hallados en el 1^{er} paso. c_i: incógnitas

$$\left.\begin{array}{lcl} k=0 & \longrightarrow & b-a = c_0+c_1+c_2 \\ \\ k=1 & \longrightarrow & \dfrac{b^2-a^2}{2} = c_0x_0+c_1x_1+c_2x_2 \\ \\ k=2 & \longrightarrow & \dfrac{b^3-a^3}{3} = c_0x_0^2+c_1x_1^2+c_2x_2^2 \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN: Dado $[a,b]$ " $\int_a^b f \simeq c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) \longrightarrow$ Única fórmula de tipo interpolatorio de 3 nodos de orden 5. Además, ese orden es máximo $\longrightarrow$ No hay otra fórmula igual que sea de orden 6.

Solución (Pbm Form. tipo interpolatorio $\left\{ \begin{array}{l} \text{min. evaluaciones} \\ \text{max orden} \end{array} \right\}$) $\equiv$ F. GAUSS

$\boxed{\text{Sea } [a,b] \text{ y } n+1 \text{ nodos, existe y es única la fórmula de tipo interpolatorio de orden } 2n+1. \text{ Y además es de orden máximo, es decir, no existe ninguna de orden } 2n+2.}$

* PROBLEMA:

Sea el producto escalar $(f,g) = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$.

Sea la base canónica $B = \{1, x, x^2, \dots, x^n, x^{n+1}\}$

Construir P_{n+1} (polinomio de grado $n+1$) ortogonal a $\{1, x, \dots, x^n\}$ respecto de $(\cdot,\cdot)$

PROCESO DE ORTOGONALIZACIÓN DE GRAM-SMIDTH.

Notemos $B' = \{w_1, w_2, \dots, w_{n+1}\}$ ortogonal.

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{(w_1, v_2)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1$$

$$w_3 = v_3 - \frac{(w_1, v_3)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 - \frac{(w_2, v_3)}{(w_2, w_2)} \cdot w_2$$

$$\vdots$$

$$w_{n+1} = \dots$$

Elijo $P_{n+1} = w_{n+1}$ polinomio de grado $n+1$ ortogonal a $\{w_1, \dots, w_n\} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow P_{n+1}$ ortogonal $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

(24/4/2008)

PROBLEMA EN FORMA DE GAUSS.

Generalizamos el problema: Sea $w(x) \geq 0$ función de peso en $[a,b]$

$$\boxed{\begin{array}{c} f = P + E(f) \Rightarrow wf = wP + wE(f) \\ \int_a^b w(x) f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x) + \int_a^b w(x)\,E(f)\,dx \end{array}}$$

Observación: Si $w(x) = 1 \longrightarrow$ Caso anterior.

La fórmula de Gauss de $n+1$ nodos con función de peso $w(x) \geq 0$ en $[a,b]$ viene dada por $\{x_i, c_i\}_{i=0}^{n}$ tal que:

$$\boxed{1} \quad \int_a^b w(x)\,x^k\,dx \simeq \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) \longrightarrow \text{Orden } 2n+1$$

Subdividimos el problema y método de construcción de la solución.

PROBLEMA: Calcular $\{x_i, c_i\}_{i=0}^{n}$ / $\int_a^b w(x)\,x^k\,dx = \sum_{i=0}^{n} c_i x_i^k \qquad k = 0, 1, \dots, n, n+1, \dots, 2n+1$

1º

2º

1er PASO:

$\boxed{2.1}$ Calcular $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ " $\int_a^b w(x)\,x^k\,dx = \sum_{i=0}^{n} c_i (x_i)^k \qquad k = n+1, \dots, 2n+1, \ \forall c_i$

incógnitas

2º PASO:

$\boxed{2.2}$ Fijados $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ calcular $\{c_i\}_{i=0}^{n}$ " $\underbrace{\int_a^b w(x)\,x^k\,dx}_{\in \mathbb{R}} = \sum_{i=0}^{n} c_i (x_i)^k, \quad k = 0, \dots, n$

Calculados en 1er paso.

incógnitas

SISTEMA LINEAL $(n+1) \times (n+1)$

1ER PASO:

$$R(f) = \int_a^b w(x)\,E(f)\,dx = \int_a^b w(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \overbrace{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}^{\Pi_n(x)\ \text{polinomio grado } n+1}\,dx$$

$$f = P + E(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\Pi_n(x) \rightarrow \int_a^b wf = \sum c_i f(x_i) + \int_a^b w\,E(f)$$

$\boxed{2.1}$ $$\underbrace{R(x^k)}_{f} = \int_a^b \frac{w(x)}{(n+1)!} \cdot \underbrace{(x^k)^{n+1)}}_{P_q \Rightarrow \text{ polinomio grado } q=0,\dots,n} \cdot \Pi_n(x)\,dx = 0 \quad , \; k = n+1, \dots, 2n+1$$

2º PASO:

1er APARTADO: Calculo P_{n+1} polinomio grado $n+1$ ortogonal a la base canónica $B = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ respecto del producto escalar:

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)w(x)\,dx$$

Esto es, ortogonalizamos por Gram-Smidth la base $B = \{1, x, \dots, x^n, x^{n+1}\}$ en $B' = \{w_1, \dots, w_n, w_{n+1}\}$ y elijo:

$$\boxed{P_{n+1} = w_{n+1}}$$

NOTA.- En estas condiciones P_{n+1} tiene $n+1$ raíces $\mathbb{R}$ distintas y están en $[a, b]$.

2º APARTADO: Calculo $n+1$ raíces de P_{n+1}, esto es, los $n+1$ nodos $\{x_0, \dots, x_n\}$ de Gauss.

3º PASO: ERROR DE INTEGRACIÓN

Sabemos que, si existe, es única la fórmula de tipo interpolatorio de $n+1$ nodos de orden $2n+1$.

Fijados $\{x_i\}_{i=0}^{n} \longrightarrow$ Condiciones de interpolación $\begin{cases} \text{NODOS: } x_0, x_1, \dots, x_n \\ \text{CONDICIONES: } \boxed{\begin{matrix} f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n) \\ f'(x_0), f'(x_1), \dots, f'(x_n) \end{matrix}} \end{cases}$

$2n+2$ condiciones

$$\boxed{\text{Polinomio de Hermite } P_{2n+1} \quad f = P_{2n+1} + E(f)}$$

$$\boxed{3} \quad \int_a^b w(x) f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) + \overbrace{\int_a^b w(x) \cdot \underbrace{\frac{f^{2n+2)}}{(2n+2)!}}_{\exists \theta \in [a,b]} \underbrace{(x-x_0)(x-x_0)\dots(x-x_n)(x-x_n)}_{\Pi_n^2(x) \geq 0}}^{R(f)}$$

$\boxed{3}$ tiene orden $2n+1$.

Error de Integración de Fórmula de Gauss $\rightarrow R(f) = \dfrac{f^{2n+2)}(\theta)}{(2n+2)!} \cdot \displaystyle\int_a^b w(x) \Pi_n^2(x)\,dx$

$$\boxed{\int_a^b w(x) f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) + \frac{f^{2n+2)}(\theta)}{(2n+2)!} \cdot \int_a^b w(x) \Pi_n^2(x)\,dx}$$

→ **FÓRMULA DE GAUSS**

$n+1$ nodos, $w(x) \geq 0$

$[a,b]$

PSEUDOCÓDIGO:

ENTRADA

$[a,b]$ $\quad w(x) \geq 0$

$n+1$ nodos

PROCESO 1

Calcular $\{x_i\}_{i=0}^{n}$:

* $(f,g) = \int_a^b w(x) f(x) g(x)\,dx$
* Ortogonalización Gram-Smidth:
  $B = \{1, x, \dots, x^{n+1}\} \longrightarrow B' = \{w_1, \dots, w_{n+2}\}$
* Raíces $\{w_{n+1}\} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in [a,b]$

PROCESO 2.

Fijados $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ calculamos $\{c_i\}_{i=0}^{n}$:

Resolver SISTEMA LINEAL :

$$\int_a^b w(x) x^k = \sum_{i=0}^{n} c_i (x_i)^k, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

SALIDA

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int_a^b w(x) f(x) \simeq \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i)$ ORDEN $2n+1$

$$R(f) = \frac{f^{2n+2)}(\theta)}{(2n+2)!} \cdot \int_a^b w(x) \Pi_n^2(x)\,dx$$

* EJERCICIO:

a) Construir Fórmula de Gauss de 3 nodos:

ENTRADA

$$\boxed{1} \quad \int_{-1}^{1} f \simeq \sum_{i=0}^{2} c_i f(x_i) \quad \text{ORDEN } 5 \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}[-1,1] \quad \omega(x)=1 \\ n+1=3\end{array}}$$

b) Hacer cambio de variable en $\boxed{1}$ para:

$$\boxed{2} \quad \int_{0}^{1} f \simeq \sum_{i=0}^{2} c_i' f(x_i') \quad \text{ORDEN } 5$$

c) Calcular valor aproximado de $\int_0^1 \ln^2 x \, dx$

ⓐ Fórmula Gauss de 3 nodos, $\omega(x)=1$, $[-1,1]$.

$$\text{Elementos} \begin{cases} [a,b]=[-1,1] \\ \omega(x)=1 \\ \{x_0, x_1, x_2, c_0, c_1, c_2\} \end{cases}$$

→ Subdividimos el problema 6x6 en 2 problemas 3x3.

1er PASO: Calcular $\{x_0, x_1, x_2\}$

* Producto escalar → $\boxed{(f,g) = \int_{-1}^{1} f \cdot g}$

* Base canónica → $B = \{1, x, x^2, x^3\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

↓ Ortogonalizo G-SMIDTH

Necesito un polinomio con 3 raíces.

$$\rightarrow \omega_1 = v_1 = 1$$

$$\rightarrow \omega_2 = v_2 - \frac{(\omega_1, v_2)}{(\omega_1, \omega_1)} \cdot \omega_1 = x - \frac{0}{2} \cdot 1 = x$$

$$(\omega_1, \omega_1) = \int_{-1}^{1} 1 \, dx = 2 \quad ; \quad (\omega_1, v_2) = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x \, dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\rightarrow w_3 = v_3 - \frac{(w_1, v_3)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 - \frac{(w_2, v_3)}{(w_2, w_2)} \cdot w_2 = x^2 - \frac{2/3}{2} \cdot 1 - \frac{0}{2/3} \cdot x = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$(w_1, v_3) = \int_{-1}^{1} 1 . x^2 dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$(w_2, v_3) = \int_{-1}^{1} x . x^2 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$$(w_2, w_2) = \int_{-1}^{1} x . x \, dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

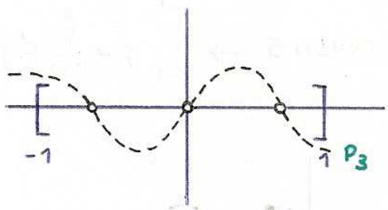
$$\rightarrow w_4 = v_4 - \frac{(w_1, v_4)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 - \frac{(w_2, v_4)}{(w_2, w_2)} \cdot w_2 - \frac{(w_3, v_4)}{(w_3, w_3)} \cdot w_3 = \cdots = \frac{x(5x^2-3)}{2} = P_3$$

* Cálculo de raíces:

$$\boxed{P_3(x) = \frac{x}{2}(5x^2-3) = 0 ;} \quad x_i = \begin{cases} 0 \\ (5x^2-3) = 0 ; \quad x = \pm\sqrt{3/5} = \pm 0'77 \end{cases}$$

Reordeno menor a mayor:

NODOS GAUSS: $\{x_0 = -0'77, \ x_1 = 0, \ x_2 = 0'77\} \quad \mathbb{R} \neq \in [-1, 1]$



2º PASO: Calculo $\{c_0, c_1, c_2\}$

Fijo $\{x_0 = -0'77, \ x_1 = 0, \ x_2 = 0'77\}$ y calculo $\{c_0, c_1, c_2\}$ tal que

$\boxed{1}$ es exacta para $\{1, x, x^2\}$

$$\hookrightarrow \int_{-1}^{1} f \simeq \sum_{i=0}^{2} c_i f(x_i)$$

$\longrightarrow$

$$\begin{cases} k=0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \int_{-1}^{1} 1 = 2 = c_0 + c_1 + c_2 \\ k=1 \longrightarrow x \longrightarrow \int_{-1}^{1} x = 0 = c_0(\underset{x_0}{-0'77}) + c_1(\underset{x_1}{0}) + c_2(\underset{x_2}{0'77}) = 0'77(-c_0+c_2) \\ k=2 \longrightarrow x^2 \longrightarrow \int_{-1}^{1} x^2 = \frac{2}{3} = c_0(-0'77)^2 + c_1(0) + c_2(0'77) = 0'77^2(c_0+c_2) \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

$$c_0 = c_2 = 0'55 \quad , \quad c_1 = 0'88$$

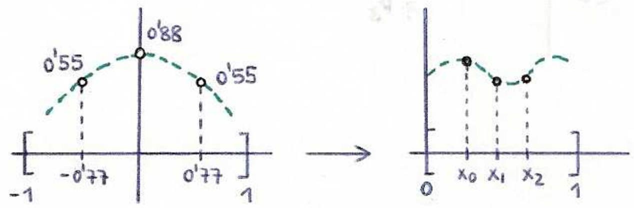
Por tanto, tenemos:

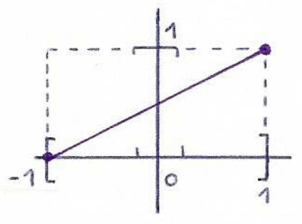
$$\boxed{\int_{-1}^{1} f \simeq 0'55 f(-0'77) + 0'88 f(0) + 0'55 f(0'77) \quad \text{ORDEN } 5}$$

Fórmula exacta para polinomios de orden ≤ 5 y no hay otra fórmula en $[-1,1]$ más exacta que ésta.

b) Cambio de variable.

$$\int_{-1}^{1} f \simeq \sum_{i=0}^{2} c_i f(x_i) \quad \text{ORDEN } 5 \rightarrow \int_{0}^{1} f \simeq \sum_{i=0}^{2} c_i' f(x_i') \quad \text{ORDEN } 5$$





$$\varphi : [-1,1] \rightarrow [0,1] \begin{cases} \varphi(-1) = 0 \\ \varphi(1) = 1 \end{cases} \dashrightarrow \varphi(t) = a + bt$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} t \\ dx = \frac{1}{2} dt \end{cases}$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_{-1}^1 f(\varphi(t)) \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\,dt}_{dx} = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 (f \circ \varphi)(t)\,dt \simeq$$

$$\simeq \frac{1}{2}\left[c_0 f(\underbrace{\varphi(x_0)}_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_0 = 0'115}) + c_1 f(\underbrace{\varphi(x_1)}_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_1 = 0'5}) + c_2 f(\underbrace{\varphi(x_2)}_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_2 = 0'885}) \right] = \underbrace{0'275}_{\frac{c_0}{2}} f(0'115) + \underbrace{0'44}_{\frac{c_1}{2}} f(0'5) + \underbrace{0'275}_{\frac{c_2}{2}} f(0'885);$$

c) $$\int_0^1 \ln^2 x\,dx \simeq 0'275 \cdot \ln^2(0'115) + 0'44 \cdot \ln^2(0'5) + 0'275 \cdot \ln^2(0'885)$$

(29/4/2008)

* PROBLEMA 5.

Dada la fórmula: $$\int_0^1 \underbrace{\sqrt{x}}_{\text{función de peso}}\ \underbrace{f(x)}_{\text{función cualquiera}}\,dx \overset{\forall f}{=} A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

¿Por qué no es de Newton-Côtes? Una de las diferencias fundamentales es que en Gauss hay función de peso. N-C y Gauss son iguales si la función de peso es 1.

1. Elementos: $w(x) = \sqrt{x} \geq 0$, $[0,1] = [a,b]$ => ENTRADA.

2. Calcular: $\{x_0, x_1, A_0, A_1\}$ => PROCESO.

2.1. Calcular $\{x_0, x_1\}$

Método No Lineal para calcular $\{x_0, x_1\}$

Producto Escalar $$\boxed{\langle f, g\rangle = \int_0^1 \sqrt{x}\, f(x) \cdot g(x)\,dx}$$

Necesitamos una base que ortogonalice a la canónica:

$$B = \{1, x, x^2\} = \{v_1, v_2, v_3\}$$

Ortogonalizamos por Gram-Smidth respecto $(\cdot,\cdot) \Rightarrow B' = \{w_1, w_2, w_3\}$

Proceso de Ortogonalización:

$$w_1 = v_1 = 1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{(w_1, v_2)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 = x - \frac{2/5}{3/5} \cdot 1 = x - \frac{3}{5}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{(w_1, v_3)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 - \frac{(w_2, v_3)}{(w_2, w_2)} \cdot w_2 = x^2 - \left(\frac{10}{9}\right)\left(x - \frac{3}{5}\right) - \frac{3}{7} = x^2 - \frac{10}{9}x + \frac{5}{21} \ ;$$

$$(w_1, w_1) = \int_0^1 \sqrt{x} = \left.\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$(w_1, v_2) = \int_0^1 \sqrt{x} \cdot x = \left.\frac{x^{5/2}}{5/2}\right]_0^1 = \frac{2}{5}$$

$$(w_2, w_2) = \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \underbrace{\int_0^1 \sqrt{x} \cdot x^2}_{\frac{2}{7}} - \frac{6}{5} \cdot \underbrace{\int_0^1 \sqrt{x} \cdot x}_{\frac{2}{5}} + \frac{3}{5} \cdot \underbrace{\int_0^1 \sqrt{x}}_{\frac{2}{3}} = \frac{8}{7 \cdot 5^2}$$

$$(w_2, v_3) = \frac{16}{3^2 \cdot 5 \cdot 7}$$

$$(w_1, v_3) = \frac{2}{7}$$

Raíces $\{x_0, x_1\}$ de $w_3(x) = 0 \Rightarrow x_i = \dfrac{\frac{10}{9} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{9}\right)^2 - \frac{20}{21}}}{2} = \dfrac{5}{9} \pm \dfrac{2}{9}\sqrt{\dfrac{10}{7}}$;

NODOS $\Rightarrow \{x_0 = 0'2899,\ x_1 = 0'8212\} \subset [0,1]$

2.2. Fijos $\{x_0, x_1\}$ calculo $\{A_0, A_1\}$

Impongo exactitud $\{1, x\}$

Imponer exactitud

$$1 \longrightarrow \int_0^1 \sqrt{x}\, f(x)\,dx = \int_0^1 \sqrt{x} \cdot 1\,dx = A_0 + A_1$$

$$x \longrightarrow \int_0^1 \sqrt{x}\, f(x)\,dx = \int_0^1 \sqrt{x} \cdot x\,dx = A_0 \underset{0'2899}{x_0} + A_1 \underset{0'8212}{x_1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \int_0^1 \sqrt{x} = \frac{2}{3} = A_0 + A_1 \\ \int_0^1 \sqrt{x} \cdot x = \frac{2}{5} = A_0 \cdot 0'2899 + A_1 \cdot 0'8212 \end{array}\right\} \Rightarrow A_0 = 0'2776 \,,\; A_1 = 0'3891$$

Por tanto, tenemos:

$$\boxed{\int_0^1 \sqrt{x}\, f(x) = 0'2776 \cdot f(0'2899) + 0'3891 \cdot f(0'8212) \quad \forall f}$$

FÓRMULA DE GAUSS: Única de orden 3 que integra esa función en $[0,1]$.

$(n = 1 \Rightarrow \text{Orden } 2n+1 = 3)$

EXPRESIÓN DEL ERROR:

Aplicar $f(x) = e^x$ y calcular una cota del error de integración cometido:

$$\int_0^1 \sqrt{x} \cdot e^x = \underbrace{0'2776 \cdot e^{0'2899} + 0'3891 \cdot e^{0'8212}}_{1'2555} + R(f)$$

$$\exists\, \theta \in [0,1] \;/\!/\; R(f) = \frac{f^{4)}(\theta)}{4!} \cdot \int_0^1 \sqrt{x}\, \underbrace{(x - x_0)^2 (x - x_1)^2}_{\text{polinomio grado 4}}\, dx$$

$$f^{4)}(\theta) = \left.(e^x)^{4)}\right]_\theta = e^\theta$$

COTA: $|R(f)| \leq \frac{e}{4.3.2} (1-x_0)^2 x_1^2 . \underbrace{\int_0^1 \sqrt{x}}_{2/3} = 0'0257 \leq \underbrace{\int_0^1 \sqrt{x}}_{2/3} . \underbrace{\int_0^1 (x-x_0)^2 (x-x_1)^2 dx}_{f\text{in orden } 4}$

$$\boxed{1'2555 - 0'0257 \leq \int_0^1 \sqrt{x}\, e^x \leq 1'2555 + 0'0257}$$

NOTA.- FÓRMULA GENERAL ERROR DE GAUSS:

$$R(f) = \frac{f^{2n+2)}(\theta)}{(2n+2)!} \int_a^b w(x) . \Pi_n^2 \, dx$$

* PROBLEMA 3.

Aplicar Simpson compuesta para $\int_0^1 \frac{1}{1+x}$ tal que el error $< 10^{-5}$

Fórmula de Simpson compuesta:

$N =$ nº subintervalos ; $h = \frac{b-a}{N} =$ cte $\equiv$ Tamaño de cada subintervalo.

$$\boxed{\int_a^b f = \frac{h}{6} \left(\sum_{i=1}^{N} f(x_{i-1}) + 4 f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + f(x_i) \right) - \underbrace{(b-a) . \frac{h^4}{2880} f^{4)}(\theta)}_{R(f)}}$$

$x_i = x_0 + hi \quad , \quad i = 1, \dots, N$

$|R(f)| < 10^{-5} \longrightarrow$ Necesito: $b-a = 1-0 = 1$; $h = \frac{1}{N}$; $f(x) = \frac{1}{1+x}$;

$f'(x) = -(1+x)^{-2}$; $f^{2)}(x) = 2(1+x)^{-3}$;
$f^{3)}(x) = -6(1+x)^{-4}$; $f^{4)}(x) = 24(1+x)^{-5}$

$$\frac{1}{N^4\cdot 2880}\cdot\frac{24}{(1+\theta)^5} \leq \frac{24}{N^4\cdot 2880}\cdot 1$$

$$\theta\in[0,1]\ ;\ 1+\theta\in[1,2]\ ;\ \frac{1}{1+\theta}\in[1/2,1]\ ;\ \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^5\in\left[1/2^5,1\right]$$

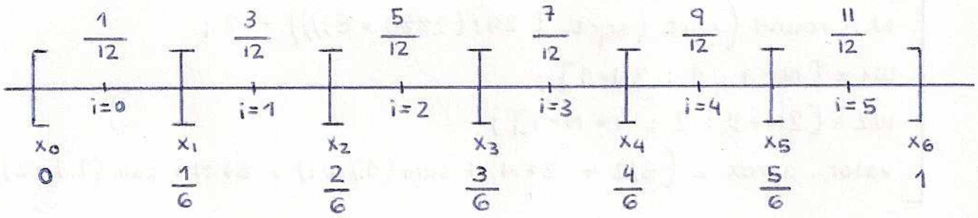
$$\frac{24}{2880}\cdot\frac{1}{N^4}<10^{-5}\ ;\ \frac{24}{2880}\cdot 10^5 < N^4\ ;\ 5'37<N \Rightarrow \boxed{N=6}$$

Ahora fijo $N=6$ y calculo el valor aproximado:

Intervalo $\Rightarrow [0,1]$; $h=\frac{1}{6}$ $\Rightarrow$ Tamaño del subintervalo.

Extremo subintervalo $\Rightarrow \frac{i}{6}$, $i=0,\dots,6$

Evaluaciones de f $\Rightarrow$ V + puntos medios intervalos: $\frac{\frac{i}{6}+\frac{i+1}{6}}{2}=\frac{2i+1}{12}$ $i=0,\dots,5$



$$\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx \simeq \frac{\overset{1/6}{h}}{6}\left(\sum_{i=1}^{N} f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)+f(x_i)\right)=$$

$$=\frac{1}{36}\left(\underbrace{f(\overset{0}{\overset{\shortparallel}{x_0}})}_{1}+\underbrace{f(\overset{1}{\overset{\shortparallel}{x_1}})}_{\frac{1}{2}}+2\cdot\sum_{i=1}^{5}\underbrace{f(\overset{i/6}{\overset{\shortparallel}{x_i}})}_{\frac{1}{1+i/6}=\frac{6}{6+i}}+4\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{6}\overset{\frac{2i+1}{12}}{\overset{\shortparallel}{\frac{x_{i-1}+x_i}{2}}}}_{\sum_{i=0}^{5} f\left(\frac{2i+1}{12}\right)=\frac{1}{1+\frac{2i+1}{12}}=\frac{12}{12+2i+1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{36}\left(1+\frac{1}{2}+2\cdot\sum_{i=1}^{5}\frac{6}{6+i}+4\cdot\sum_{i=0}^{5}\frac{12}{12+2i+1}\right)$$

$$\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx=\ln(1+x)\Big]_0^1=\ln 2$$

CODIFICAR RUTINA:

$\boxed{\ln 2\ ,\ \varepsilon} \longrightarrow \boxed{N \,/\!/\, |R(f)| < \varepsilon \quad \text{Aplicar\_fin\_N}} \longrightarrow \boxed{\text{valor\_aprox\_ln2} \quad \text{error\_aprox} < \varepsilon}$

ENTRADA — PROCESO — SALIDA

* Calcular N // $\dfrac{24}{2880} \cdot \dfrac{1}{N^4} < \varepsilon \longrightarrow \dfrac{24}{2880} \cdot \varepsilon^{-1} < N^4 \longrightarrow N = \underset{\substack{/\!/ \\ \text{redondeo}}}{\text{round}} \left(\sqrt[4]{\dfrac{24 \cdot \varepsilon^{-1}}{2880}} + 1 \right)$

* Fijo N.

$$\text{Valor\_aprox\_ln2} = \frac{1}{N.6} \left[1 + \frac{1}{2} + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \frac{N}{N+i} + 4 \sum_{i=0}^{N-1} \frac{2N}{2i+2N+1} \right]$$

MATLAB:

```
function [valor_aprox] = ln_2 (epsilon) ;
N = round ( sqrt ( sqrt ( 24/(2880 * ε)))) + 1 ;
W1 = [N+1 : 1 : 2N-1] ;
W2 = [2N+1 : 2 : 4*N-1] ;
valor_aprox = (3/2 + 2*N * sum(1./W1) + 8*N* sum(1./W2)) / (6*N) ;
```

EJEMPLO:

```
>> ln_2 (10^-5)
   0'69314866
>> ln_2(10^-5) - log(2)
   -1.481649 e^-0,06
```

GENERALIZACIÓN:

E. — P. — S.

$\boxed{x,\ \varepsilon} \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow \boxed{\text{valor\_aprox\_ln}x \quad \text{error\_aprox} < \varepsilon}$

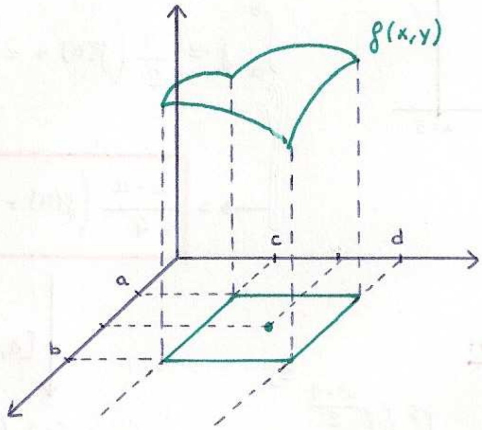
Cambiar intervalo
[0,1]

(6/5/2008)

5. INTEGRACIÓN 2D.

Sea el rectángulo $A = [a,b] \times [c,d]$.

$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ = Volumen comprendido entre graf(f) y A.

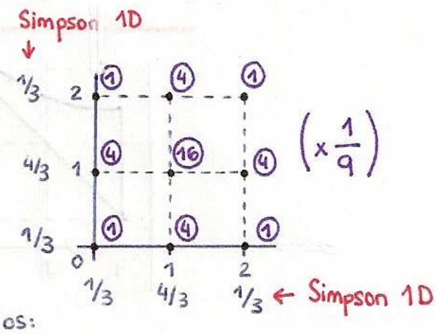


$$A = \int_c^d \Big(\underbrace{\int_a^b f(x,y)\,dx}_{\text{fin en } [a,b]\ \{x_i,\alpha_i\}_{i=1}^{n}} \Big) dy \simeq \int_c^d G(y)\,dy \simeq \sum_{j=1}^{m} \beta_j \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i, y_j) \Big) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \beta_j \alpha_i f(x_i, y_j)$$

fin en $[a,b]$ $\{x_i, \alpha_i\}_{i=1}^{n} \Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot f(x_i, y)}_{G(y)}$

> Las fin 2D vienen dadas por $\{(x_i, y_j)\ ;\ \beta_{ij}\}$
>
> $$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy \simeq \sum_{i=0,\,j=0}^{i=n,\,j=m} \beta_{ij} f(x_i, y_j)$$

* **EJEMPLO:** Simpson 2D en $[a,b] \times [c,d] = [0,2] \times [0,2]$



Simpson $[0,2] = \int_a^b f \simeq \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$

$\{x_i\} = \{0, 1, 2\}$, $\{c_i\}$ = pesos $= \left\{ \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3} \right\}$

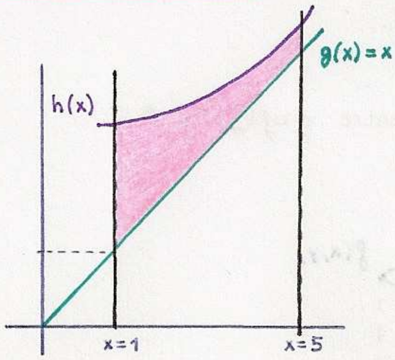
Para integrar esto sumo las 9 evaluaciones de f en los nodos:

$$\iint_{[0,2]\times[0,2]} f(x,y)\,dx\,dy \simeq \frac{1}{9} \Big(f(0,0) + 4f(0,1) + f(0,2) + 4f(1,0) + 16f(1,1) + 4f(1,2) + f(2,0) + 4f(2,1) + f(2,2) \Big)$$

* PROBLEMA 11.

Dominio Ω en $\mathbb{R}^2$ → Limitado por: Rectas $x=1$, $x=5$

Funciones $g(x)=x$, $h(x)=\frac{x^2+9}{2}$



Fin: TRAPECIO COMPUESTA POR 2 SUBINTERVALOS.

$$\int_a^b f \simeq \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + f(b)\right) = \xrightarrow[h=\frac{b-a}{N}]{N=2}$$

$$\longrightarrow = \boxed{\frac{b-a}{4}\left(f(a) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)}$$

$[a,b]=[1,5]$

Construimos fin 2D:

$$I = \iint_\Omega f(x,y)\,dxdy = \int_1^5 \underbrace{\left(\int_x^{\frac{x^2+9}{2}} f(x,y)\,dy\right)}_{S(x)} dx = \frac{5-1}{4}\left(S(1)+S(3)+S(5)\right) =$$

$$= S(1)+S(3)+S(5) \simeq ⊛$$

¡¡ LÍMITES !!

$x=1$

$\frac{1^2+9}{2}=5 \Rightarrow \int_1^5 f(1,y)\,dy \simeq$ fin $[1,5] = \overset{\frac{5-1}{4}}{1}\, f(1,1) + 2f(1,3) + f(1,5) = S(1)$

Integramos esta variable.

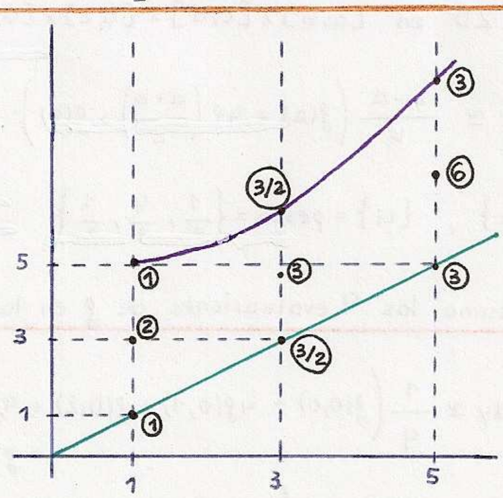
Sale de sustituir el intervalo en la fin.

$$S(3) = \int_3^9 f(3,y)\,dy = \underbrace{\frac{9-3}{4}}_{3/2}\left(f(3,3) + 2f(3,\overset{(3+9)/2}{6}) + f(3,9)\right)$$

$$S(5) = \int_5^{17} f(5,y)\,dy = \underbrace{\frac{17-5}{4}}_{3}\left(f(5,5) + 2f(5,\overset{(17+5)/2}{11}) + f(5,17)\right)$$

FIJO UNA x ENTRE 1 y 5 Y LUEGO INTEGRO LA Y.

$$⊛ = f(1,1) + 2f(1,3) + f(1,5) + \frac{3}{2}\left[f(3,3) + 2f(3,6) + f(3,9)\right] + 3\left[f(5,5) + 2f(5,11) + f(5,17)\right]$$



(n) pesos sacados de la fórmula.

Aplicar $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2} \longrightarrow \displaystyle\int_1^5 \int_x^{\frac{x^2+9}{2}} \frac{y}{x^2} \simeq \underset{f(1,1)}{1} + 2.\underset{f(1,3)}{3} + \underset{f(1,5)}{5} + \ldots$

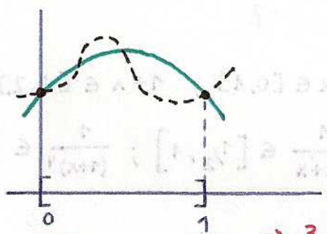
(7/5/2008)

* PROBLEMA 4:

a) Construir $\displaystyle\int_0^1 f \simeq \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f'(0) + \alpha_2 f(1)$ Expresión error. Orden

b) Calcular el valor aproximado de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x}$ y acotar el error.

(a) Construir P_2 con la fórmula de Newton.



$f(0)$, $f'(0)$; $f(1)$ $\Rightarrow$ 3 cond. $\Rightarrow P_2$

TABLA DE DIFERENCIAS DIVIDIDAS:

	$f[a]$	$f[a,a]$	$f[a,a,b]$
0	$f(0)$		
		$f'(0)$	
0	$f(0)$		$\dfrac{f(1)-f(0)-f'(0)}{1}$
		$\dfrac{f(1)-f(0)}{1}$	
1	$f(1)$		

$\rightarrow$ $P_2(x) = f(0) + f'(0).\overset{(x-a)}{x} + (f(1)-f(0)-f'(0))\underset{(x-a)^2}{x^2}$

$\rightarrow$ $E_2(x) = \dfrac{f^{3)}(\xi)}{3!} \cdot x^2(x-1)$

$\downarrow$ Integramos

$$\int_0^1 f \simeq \int_0^1 P_2 = f(0).x\Big]_0^1 + f'(0).\frac{x^2}{2}\Big]_0^1 + (f(1)-f(0)-f'(0)).\frac{x^3}{3}\Big]_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3}f(0) + \frac{1}{6}f'(0) - \frac{1}{3}f(1)$$

$$R(f) = \int_0^1 \frac{f^{3)}(\xi)}{3!} . \underbrace{\underbrace{x^2}_{\geq 0}\underbrace{(x-1)}_{\leq 0}}_{\leq 0} dx \xrightarrow[\exists \theta \in [0,1]]{\text{Valor medio integral}} = \frac{f^{3)}(\theta)}{3!}\int_0^1 x^2(x-1)\,dx =$$

$$= \frac{f^{3)}(\theta)}{3!}\left(\frac{x^4}{4!}\Big]_0^1 - \frac{x^3}{3!}\Big]_0^1\right) = -\frac{1}{6.12} f^{3)}(\theta) \quad \text{ORDEN 2}$$

(b) Aplicamos la fórmula a esta función:

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx \simeq \frac{2}{3}\cdot \underset{f(0)}{\underset{\downarrow}{0}} + \frac{1}{6}\cdot \underset{f'(0)}{\underset{\downarrow}{1}} - \frac{1}{3}\cdot \underset{f(1)}{\underset{\downarrow}{\frac{1}{2}}} = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f''(x) = -2(1+x)^{-3}$$

$$f^{3)}(x) = 6(1+x)^{-4}$$

Cota del error:

$$\left|R(f)\right| = \frac{1}{6.12}\cdot\left|f^{3)}(\theta)\right| = \frac{\cancel{6}}{\cancel{6}.12}\cdot\frac{1}{|(1+x)^4|} \leqslant \frac{1}{12} = 0'083$$

$x \in [0,1]$; $1+x \in [1,2]$;

$\frac{1}{1+x} \in [1/2, 1]$; $\frac{1}{(1+x)^4} \in [\frac{1}{2^4}, 1]$

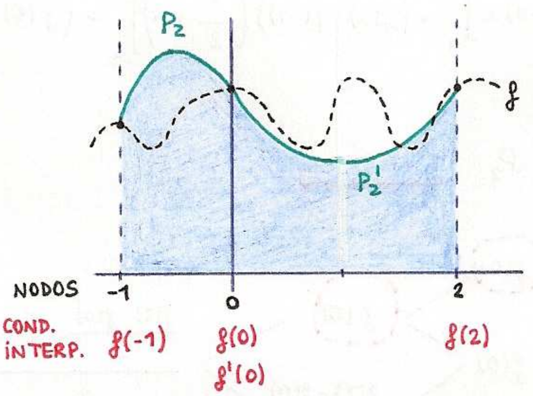
Luego: $|R(f)| \leqslant 0'083$

* PROBLEMA 8.

Sea $\Delta = \{-1, 0, 2\}$ del $[-1, 2]$ y s spline cuadrático en Δ.

(a) Construir $\int_{-1}^{2} f \simeq \int_{-1}^{2} s$

s spline cuadrático $\Delta = \begin{cases} s|_{[-1,0]} \in \mathcal{P}_2 \; ; \; s|_{[0,2]} \in \mathcal{P}_2 \\ s|_{[-1,2]} \in C^1 \text{ esto es } \begin{cases} s(0^+) = s(0^-) \\ s'(0^+) = s'(0^-) \end{cases} \end{cases}$



$$\boxed{\int_{-1}^{2} f \simeq \int_{-1}^{2} s = \int_{-1}^{0} s|_{[-1,0]} + \int_{0}^{2} s|_{[0,2]} = Af(-1) + Bf(0) + Cf'(0) + Df(2)}$$

Dimensión del problema:

Parámetros libres => Coeficientes => $P_2 \to 3$, $P_2' \to 3$ => $\underline{\underline{6}}$

Restricciones => 2

Problema Interpolación => $6 - 2 = 4$

Condiciones Interpolación => 4

Problema Interpolación con solución única.

Problema Integración con solución única.

* Construir $s\big|_{[-1,0]} \in \mathcal{P}_2$ <u>F. NEWTON</u>

$$\begin{array}{lllll}
-1 & — & f(-1) & & \\
 & & & \dfrac{f(0)-f(-1)}{1} & \\
0 & — & f(0) & & \dfrac{f'(0)-f(0)+f(-1)}{1} \\
 & & & f'(0) & \\
0 & — & f(0) & &
\end{array}$$

$$s\big|_{[-1,0]} = f(-1) + \left(f(0)-f(-1)\right)(x+1) + \left(f'(0)-f(0)+f(-1)\right)(x+1)\,x$$

$\downarrow$

$$\int_{-1}^{0} s\big|_{[-1,0]} = f(-1)\,x\Big]_{-1}^{0} + \left(f(0)-f(-1)\right)\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big]_{-1}^{0} + \left(f'(0)-f(0)+f(-1)\right)\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big]_{-1}^{0}$$

* Construir $s\big|_{[0,2]} \in \mathcal{P}_2$ <u>F. NEWTON</u>

$$\begin{array}{lllll}
0 & — & f(0) & & \\
 & & & f'(0) & \\
0 & — & f(0) & & \dfrac{\dfrac{f(2)-f(0)}{2}-f'(0)}{2} = \dfrac{f(2)-f(0)-2f'(0)}{4} \\
 & & & \dfrac{f(2)-f(0)}{2} & \\
2 & — & f(2) & &
\end{array}$$

$$s\big|_{[0,2]} = f(0) + f'(0)\,x + \left(\frac{f(2)-f(0)-2f'(0)}{4}\right)x^2$$

$\downarrow$

$$\int_{0}^{2} s\big|_{[0,2]} = f(0)\,x\Big]_{0}^{2} + f'(0)\cdot\frac{x^2}{2}\Big]_{0}^{2} + \left(\frac{f(2)-f(0)-2f'(0)}{4}\right)\frac{x^3}{3}\Big]_{0}^{2}$$

* $$\int_{-1}^{2} f \simeq \int_{-1}^{0} s\big|_{[-1,0]} + \int_{0}^{2} s\big|_{[0,2]} = \underbrace{\frac{1}{3}}_{A} f(-1) + \underbrace{2}_{B} f(0) + \underbrace{\frac{1}{2}}_{C} f'(0) + \underbrace{\frac{2}{3}}_{D} f(2)$$

b) ¿Qué relación tiene $\phi(x) = \begin{cases} x(x+1) & , \ x \in [-1,0] \\ \dfrac{-x(x-2)}{2} & , \ x \in [0,2] \end{cases}$ con el prob. integración?

$\phi|_{[-1,0]} \in \mathcal{P}_2$, $\phi|_{[0,2]} \in \mathcal{P}_2 \Rightarrow$ ¿ $\phi(0^+) = \phi(0^-)$? $\boxed{1}$ ¿$\phi'(0^+) = \phi'(0^-)$? $\boxed{2}$

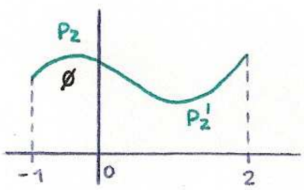
↳ Ambas ramas son $\mathcal{P}_2 \Rightarrow$ ¿Cumple las condiciones de interpolación?

$\boxed{1}$ $\left.\dfrac{-x(x-2)}{2}\right]_0 = 0$; $\left. x(x+1)\right]_0 = 0 \Rightarrow \phi(0^+) = \phi(0^-)$

$\boxed{2}$ $\left.(-x+1)\right]_0 = 0$; $\left.(2x+1)\right]_0 = 0 \Rightarrow \phi'(0^+) = \phi'(0^-)$

Esto significa que al integrar ϕ con esta fórmula de integración, el resultado será exacto:

$\boxed{1}$ y $\boxed{2}$ $\Rightarrow R(f) = 0$



ϕ coincide con P_2 y P_2'

ϕ spline cuadrático $\Delta = \{-1, 0, 2\}$

$\phi(-1) = 0 = f(1)$

$\phi(0) = 0 = f(0)$

$\phi'(0) = 1 = f'(1)$

$\phi(2) = 0 = f(2)$

ϕ es el 3er elemento de la base de Lagrange:

$$\int_{-1}^{2} \phi = A\underbrace{\phi(-1)}_{0} + B\underbrace{\phi(0)}_{0} + C\underbrace{\phi'(0)}_{1} + D\underbrace{\phi(2)}_{0} \Longrightarrow \int_{1}^{2} \phi = C$$